

**Die Rolle von
Hopfkategorien und Operaden
in störungstheoretischen
Quantenfeldtheorien**

Dissertation

zur Erlangung des Grades

„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Physik

der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Mathias Mertens

geboren in Mainz

Mainz 2000

Datum der Prüfung: 1.12.2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Warum Renormierung?	1
1.2	Warum eine algebraische Beschreibung von Renormierung?	2
1.3	Zielsetzung der Arbeit	2
1.4	Gliederung und Inhalt der Arbeit	3
I	Bimonoidale Kategorien und störungstheoretische Quantenfeldtheorie	5
2	Hopf kategorien	7
2.1	Kategorien	7
2.2	2-Kategorien	13
2.3	Monoidale Kategorien	16
2.4	Hom-Mengen, additive Kategorien und Bereicherungen	18
2.4.1	Kurze Bemerkungen über höherdimensionale Algebra	22
2.5	2-Vektorräume	23
2.6	Hopf kategorien	26
2.7	Kurze Zusammenfassung	30
2.8	Literaturangabe zu diesem Kapitel	31
3	Renormierung und Hopf algebren	33
3.1	Die Zimmermannsche Forest Formula	33
3.2	Die Hopf algebra der Wurzelbäume, \mathcal{H}_R	37
3.3	Der Darstellungsraum V	41
3.4	Die Charaktere von \mathcal{H}_R	45
3.5	Renormierungsabbildungen, Skalenwechsel und das Baumdifferential	49
3.6	Die Gruppe G_R	57
3.7	Kurze Zusammenfassung	62
3.8	Literaturangabe zu diesem Kapitel	63
4	Renormierung und die Hopf kategorie Φ	65
4.1	Die Objekte der Kategorie Φ	66
4.2	Die Morphismen von Φ	72
4.3	Die additive Struktur von Φ	76
4.4	Die monoidale Kategorie Φ	81
4.5	Die 2-Koalgebra Φ	85
4.6	Die 2-Bialgebra Φ	88
4.7	Die Hopf kategorie Φ	94
4.8	Hopf kategorie und Renormierung	96
4.9	Zusammenfassung des Kapitels	98

II	Baumoperaden	101
5	Operaden	103
5.1	Operaden	103
5.2	Baumoperaden	108
6	Die Hopfalgebra der Baumoperaden \mathcal{O}_t	114
6.1	Die Hopfalgebra der Baumoperaden \mathcal{O}_t	114
6.2	Beispiel	115
6.3	Zusammenfassung des Abschnittes	118
7	Zusammenfassung und Ausblick	121

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Warum Renormierung?

In der Geschichte der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie treten immer wieder mathematische Probleme auf, die zum Teil bis heute noch nicht vollständig gelöst sind. Trotzdem besitzt die störungstheoretische Quantenfeldtheorie, insbesondere die Quantenelektrodynamik (QED), eine sehr große Vorhersagekraft. Die Tatsache, daß Quantenfeldtheorien zu erfolgreichen phänomenologischen Beschreibungen führen, legt nahe, daß die mathematischen Probleme lediglich aufgrund eines unvollständigen Verständnisses der Theorie auftreten, die exakte mathematische Formulierung aber trotzdem möglich, wenn auch noch nicht gefunden ist. Das historisch bedeutendste Problem ist das Auftreten von Divergenzen bei der Berechnung von Feynmangraphen. Feynmangraphen sind graphische Äquivalente zu Integralen, die in störungstheoretischen Berechnungen von Streuquerschnitten auftreten. Bei der Berechnung solcher Feynmangraphen treten zwei Formen von Divergenzen auf: Infrarotdivergenzen und Ultraviolettdivergenzen (im folgenden als UV-Divergenzen bezeichnet). Wir bezeichnen dabei ein Feynmandiagramm als UV-divergent, falls sein analytischer Wert für sehr große an der Integration beteiligte Impulse divergiert. Liefern diese Integrale für sehr kleine Impulse divergente Werte, so bezeichnet man den Feynmangraphen als infrarotdivergent. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Problematik der Behandlung von UV-Divergenzen.

Das Auftreten von UV-Divergenzen ist eng verknüpft mit der Tatsache, daß Quantenfeldtheorien keine absoluten Vorhersagen machen. Das bedeutet, daß wir zur Beschreibung einer Quantenfeldtheorie Parameter wie Massen oder Kopplungskonstanten anhand experimentell ermittelter Werte bestimmen müssen. Da kein exaktes Verfahren für Berechnungen in Quantenfeldtheorien bekannt ist, sondern diese nur mit Hilfe der Störungstheorie ausgewertet werden kann, muß die Bestimmung der Parameter in jeder Ordnung der Störungstheorie von neuem durchgeführt werden. Bestimmt man in jeder dieser Ordnungen die auftretenden Parameter anhand der experimentell ermittelten Größen, so können Vorhersagen berechnet werden, in denen keine UV-Divergenzen auftreten, obwohl in Zwischenschritten Divergenzen existieren. Dieses Verfahren nennt man *Renormierung*. Allerdings gestaltet sich die Renormierung der einzelnen Parameter als technisch aufwendig. Um die Parameter der Theorie zu bestimmen, müssen zu jedem UV-divergenten Korrekturterm sogenannte Abzugsterme (engl. counterterm) bestimmt werden. Die Berechnung der Abzugsterme erfordert ein nichttriviales Verfahren, bei dem auf iterative Art und Weise Abzugsterme niedrigerer Ordnung der Störungstheorie kombiniert werden. Die Struktur dieses Verfahrens kann durch eine sogenannte *Hopfalgebra* beschrieben werden.

Mit Hilfe von Renormierung ist es gelungen, das Problem des Auftretens von UV-Divergenzen in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien zu lösen und Berechnungen zu ermöglichen, die eine hohe experimentelle Vorhersagekraft besitzen.

1.2 Warum eine algebraische Beschreibung von Renormierung?

Der Renormierungsvorgang kann mathematisch durch eine Hopfalgebrenstruktur beschrieben. Die Berechnung der Abzugsterme eines gegebenen divergenten Feynmangraphen war jedoch schon vor der algebraischen Formulierung bekannt. Allerdings gab es keine algebraische Beschreibung der Berechnung der Abzugsterme und des damit verbundenen Renormierungsverfahrens. Doch welchen Vorteil bietet diese algebraische Formulierung? Ziel der theoretischen Physik ist es, eine mathematisch konsistente Formulierung einer physikalischen Theorie zu finden, mit deren Hilfe experimentelle Ergebnisse erklärbar und berechenbar sind. Die Einführung einer algebraischen Formulierung liefert eine umfassende und zugleich konsistente Beschreibung des Renormierungsvorgangs. Sie stellt Methoden zur Verfügung, die einerseits zu einer neuen mathematischen Interpretation der an dem Renormierungsvorgang beteiligten physikalischen Größen geführt, und andererseits Lösungen für mathematische Probleme durch physikalische Ansätze geliefert hat [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Wie oben bereits erwähnt, existieren noch offene Fragen bezüglich der mathematischen Formulierung von Quantenfeldtheorie. Deshalb ist es wichtig, quantenfeldtheoretische Methoden mathematisch exakt zu beschreiben, um deren strukturelle Hintergründe besser verstehen zu können und durch ein genaueres Studium dieser Strukturen möglicherweise Aufschluß über andere Fragestellungen dieser Theorie zu bekommen.

1.3 Zielsetzung der Arbeit

Diese Arbeit ist Teil einer weiteren Untersuchung und Interpretation der algebraischen Struktur von Renormierung, mit dem Ziel, mehr über die mathematische Struktur von Renormierung zu erfahren und neue mathematische Methoden zur Verfügung zu stellen. Die Arbeit baut auf Veröffentlichungen von Kreimer und Connes [1, 2, 3, 4, 13] auf, in denen die Hopfalgebrenstruktur von Renormierung eingeführt wird. Grundlage ist dabei die in [1, 2] definierte Hopfalgebra der Wurzelbäume, \mathcal{H}_R , und deren Darstellungen [3, 4].

Ausgehend von diesen algebraischen Strukturen behandelt diese Arbeit zwei Themenschwerpunkte:

- i) Eine kategorientheoretische Untersuchung der algebraischen Formulierung von Renormierung
- ii) Eine Interpretation der Hopfalgebra der Wurzelbäume als eine Hopfalgebra über einer speziellen Operade, der sogenannten Baumoperade.

Der erste Themenschwerpunkt beschäftigt sich mit einer kategorientheoretischen Beschreibung des Renormierungsvorganges. Kurz gesagt sind Kategorien eine Erweiterung des Mengenbegriffes, bei der die Objekte der Kategorie die Rolle der Elemente einer Menge übernehmen, zwischen denen aber, im Gegensatz zur Mengentheorie, Abbildungen existieren, die einen Vergleich zweier Objekte ermöglichen. Diese Abbildungen werden in der Kategorientheorie Morphismen oder Pfeile genannt. Mit Hilfe von Kategorien wird eine Beschreibung von Renormierung möglich, bei der alle verschiedenen Theorien als ein Objekt angesehen werden, und somit Renormierung theorieunabhängig formuliert werden kann. Eine tiefgreifendere kategorientheoretische Interpretation entsteht durch die Einführung einer nichtassoziativen "Multiplikation", wobei die Assoziativität, durch eine Abbildung kontrollierbar, verletzt wird. Diese multiplikative Struktur gibt Anlaß zur Definition weiterer Strukturen, so daß Renormierung letztendlich anhand einer sogenannten *Hopf-kategorienstruktur* [18] interpretiert wird.

Der zweite Themenschwerpunkt diskutiert einen zur Hopfalgebra der Wurzelbäume [1, 2, 14] alternativen algebraischen Zugang von Renormierung. Die Hopfalgebra baut dabei auf graphentheoretische Objekte, die sogenannten Wurzelbäume, auf. In diesem Teil der Arbeit wird ein Äquivalent zu Wurzelbäumen definiert, das rein algebraischer Natur ist, so daß kein zusätzlicher graphentheoretischer Input zur algebraischen Beschreibung von Renormierung mehr benötigt wird. Die damit zur Verfügung gestellte mathematische Methodik ist eine Spezialform sogenannter "Operaden" [32].

1.4 Gliederung und Inhalt der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich gemäß der Themenschwerpunkte in zwei Teile.

Der erste Teil **Bimonoidale Kategorien und störungstheoretische Quantenfeldtheorie** beschäftigt sich mit der kategorientheoretischen Interpretation von Renormierung. Der zweite Teil **Baumoperaden** studiert graphentheoretische Analoga zwischen Baumoperaden und Wurzelbäumen.

Der erste Teil ist wie folgt gegliedert:

Hopf kategorien

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen aus der Kategorientheorie zusammengestellt, die für die kategorientheoretische Interpretation von Renormierung notwendig sind. Dabei werden der Begriff der Kategorie, die additive und k -lineare Struktur auf Kategorien, sowie 2-Kategorien vorgestellt. Mit diesen Strukturen werden wir dann Objekte aus der höherdimensionalen Algebra, wie 2-Algebren, 2-Vektorräume und 2-Hopfalgebren definieren.

In diesem Kapitel wird dabei mehr Wert auf eine anschauliche Einführung in dieses abstrakte Gebiet gelegt, als auf ein Studium der Detailfragen. Es wird ein Schwerpunkt auf die Interpretation der diskutierten Objekte gelegt, wobei keine Beweise geführt werden. Dennoch werden alle wichtigen mathematischen "Werkzeuge" zur Verfügung gestellt, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig sind.

Renormierung und Hopf algebren

Hier werden noch einmal die algebraische Formulierung von Renormierung, wie sie in [1, 2, 3, 4] definiert wird, zusammengefaßt.

Zuerst wird die iterative Struktur der Bestimmung von Abzugstermen UV-divergenter Feynmangraphen, die durch die Zimmermannsche *Forest*-Formel beschrieben wird, vorgestellt.

Im Anschluß daran wird gezeigt, wie diese iterative Struktur durch eine Hopf algebra beschrieben werden kann, wobei die Generatoren der Hopf algebra mit der Topologie der Subdivergenzen divergenter Feynmangraphen korrespondieren [1, 2].

Im Anschluß daran wird, motiviert durch die Untersuchung der Darstellungen der Hopf algebra auf einem speziellen Ring von Laurentreihen, eine gruppentheoretische Formulierung der Renormierung divergenter Feynmangraphen gegeben [3, 4].

Auch in diesem Kapitel wird ein größeres Gewicht auf eine anschauliche als auf eine mathematische Darstellung gelegt. Beispiele verdeutlichen die diskutierten Konstruktionen.

Renormierung und die Hopf kategorie Φ

Dieses Kapitel behandelt die kategorientheoretische Interpretation der algebraischen Struktur von Renormierung, die in dem letzten Kapitel diskutiert wurde.

Es wird eine Kategorie definiert, deren Objekte eine Menge von Darstellungen der Hopf algebra \mathcal{H}_R sind, die bezüglich des Renormierungsverfahrens dieselbe charakteristische Eigenschaft besitzen. Die Morphismen dieser Kategorie repräsentieren die Wirkung von Renormierungsabbildungen und damit die Wirkung von Renormierungsschemata.

Es wird gezeigt werden, daß diese Kategorie eine k -lineare additive Struktur trägt, die es erlaubt, die Wirkung allgemeiner Renormierungsschemata, wie die des *On-Shell*-Schemas, durch die Wirkung von Morphismen zu beschreiben.

Auf dieser Kategorie wird eine Hopf kategorienstruktur definiert, die eine kategorientheoretische Interpretation von Renormierung ermöglicht. In dieser Hopf kategorie wird der Renormierungsvorgang unabhängig von der individuell betrachteten Quantenfeldtheorien nur aufgrund charakteristischer Eigenschaften bezüglich der Renormierungsabbildungen beschrieben.

Auch in diesem Kapitel werden Beispiele die definierte Struktur verdeutlichen.

Der zweite, kürzere Teil beschäftigt sich mit der Interpretation von Wurzelbäumen als eine sogenannte *Baumoperade*.

Baumoperaden

Zu Beginn dieses Kapitels wird die Definition einer Operade gegeben und anhand ihrer graphischen Interpretation erläutert. Durch die Äquivalenz der graphischen Interpretation von Operaden und Wurzelbäumen wird eine spezielle Operade, die Baumoperade, definiert, die äquivalent den Wurzelbäumen ist. Somit wird eine Übersetzung angegeben, die jedem undekorierten Wurzelbaum eine Baumoperadenstruktur zuordnet.

Auf der Menge der Baumoperaden wird dann eine zu \mathcal{H}_R isomorphe Hopfalgebra definiert, so daß es gelingt, eine rein algebraische Formulierung der Hopfalgebra \mathcal{H}_R ohne zusätzliche graphentheoretische Generatoren zu definieren. Einige Beispiele verdeutlichen die definierte Konstruktion.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Teil I

**Bimonoidale Kategorien und
störungstheoretische
Quantenfeldtheorie**

Kapitel 2

Hopfkatategorien

Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der kategorientheoretischen Interpretation von Renormierung in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien (pQFT). Dabei werden wir Bereiche der Kategorientheorie ansprechen, die nicht in der Standardliteratur über Kategorien enthalten sind, wie zum Beispiel *2-Vektorräume*, *bimonoidale Kategorien* oder *Hopfkatategorien*. Diese speziellen Kategorien findet man nur in wenigen Veröffentlichungen, die keine didaktische Einführung in die Theorie dieser Kategorien geben. Aus diesem Grund wollen wir alle kategorientheoretischen Grundlagen, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen, anschaulich diskutieren.

Um *bimonoidale Kategorien* und *Hopfkatategorien* (2.6) einführen zu können, wollen wir zunächst die kategorientheoretischen Grundlagen wiederholen (2.1, 2.2, 2.3, 2.4). Die dazu benötigten Kenntnisse aus der Kategorientheorie wie *monoidale Kategorien* (2.3), *additive Kategorien* (2.4), *Kategorifizierung* (2.1) und auch der Begriff der *Kategorie* selbst (2.1) sollen zuerst noch einmal kurz vorgestellt und motiviert werden. Dabei werden wir uns an das Standardbuch [21] halten. Beweise werden wir nicht führen, sie können in [21] gefunden werden.

Nach einer kurzen Einführung in die Kategorientheorie werden wir dann *Hopfkatategorien* definieren. In der vorliegenden Arbeit wollen wir eine Anwendung von Hopfkatategorien in der Physik, genauer gesagt, in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien, angeben. Der Ansatzpunkt dieser Anwendung von Hopfkatategorien wird die *Renormierung* sein. Grundlage der Betrachtungen des Zusammenhangs zwischen Kategorientheorie und Renormierung sind die Arbeiten von D. Kreimer [1, 2, 3, 4], in denen eine algebraische Formulierung der iterativen Struktur von Renormierung in Form einer Hopfalgebra gegeben wird. Diese Hopfalgebra und spezielle Darstellungen von ihr sind Grundlage der in dieser Arbeit vorgenommenen kategorientheoretischen Untersuchung störungstheoretischer Quantenfeldtheorien. Dabei wird der Schwerpunkt auf die Skalen gelegt werden, die bei der Berechnung von Feynmandiagrammen in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien auftreten. Dies nur als kurze Motivation für die Einführung der nun vorgestellten Strukturen, um dem Leser eine physikalische Anwendung für die Lektüre dieses trockenen Themas in Aussicht zu stellen.

2.1 Kategorien

Beginnen wir mit einer Einführung in das Gebiet von Kategorien.

Wir werden eine Motivation für die Definition der Kategorien geben und versuchen eine Vorstellung davon zu vermitteln, welchen Nutzen man durch die Einführung von Kategorien erhält. In der Definition einer Kategorie werden wir uns an die Monographie [21] halten. Allerdings wird unsere Interpretation von Kategorien etwas anders sein als in der Standardliteratur üblich. Wir werden den Begriff der *Kategorifizierung* einführen und letztendlich eine Kategorie als *Kategorifizierung* einer Menge betrachten. Der Begriff *Kategorifizierung* wurde von Louis Crane eingeführt.

Kategorifizierung ist dabei der Ausgangspunkt für ein ganzes Feld von Theorien, die sich mit der Übersetzung algebraischer Objekte in die Sprache der Kategorien beschäftigt [16, 17]. Man bezeichnet dieses Feld als *höherdimensionale Algebra*. Darüberhinaus liefert *Kategorifizierung* eine Interpretation kategorientheoretischer Objekte.

Am Anfang wollen wir den Begriff *Kategorifizierung* allerdings erst noch ohne Definition benutzen. Dabei soll dieser Begriff von seiner wörtlichen Bedeutung verstanden werden. Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir dann eine Definition dieses Begriffes geben.

Beginnen wir nun mit der Definition einer *Kategorie*.

Grundlage für das Verständnis von Kategorien ist der Begriff der *Menge*. Mengen haben die Eigenschaft, daß sie aus Elementen bestehen. Darüberhinaus können Abbildungen zwischen je zwei Mengen existieren. Dabei sind zwei Elemente einer Menge entweder gleich oder verschieden. In der Mathematik ist es jedoch häufig wichtig, zwei Elemente nicht nur als gleich oder verschieden anzusehen, sondern vergleichen zu können. Man wünscht sich, zwei Elemente als *ähnlich* oder *äquivalent* zu bezeichnen. Was bedeutet "ähnlich" in diesem Zusammenhang?

Wenn wir zwei Elemente einer Menge vergleichen wollen, benötigen wir Eigenschaften, aufgrund derer wir einen Vergleich führen können. Die einfachste Eigenschaft zweier Elemente ist es, Elemente ein und derselben Menge zu sein. Den einzigen Vergleich, den wir aufgrund dieser Eigenschaft führen können, ist, ob die beiden Elemente gleich oder verschieden sind. Dies ist die Situation der Mengentheorie. Wenn wir die Elemente einer Menge aufgrund spezifischer Strukturen auswählen, können wir zwei Elemente einer Menge nun anhand ihrer Eigenschaften bezüglich dieser Strukturen vergleichen. Wie kann man mathematisch solch einen Vergleich beschreiben? Solche Vergleiche kann man anhand von Abbildungen zwischen zwei Elementen führen, die die zugrundeliegende Strukturen respektieren. Sind dabei zwei Elemente einer Menge (mit Struktur) zwar als Elemente einer Menge verschieden, besitzen aber bezüglich der gegebenen Strukturen dieselbe Eigenschaft, so können wir sie als äquivalent oder ähnlich bezeichnen. Diese Art von Vergleichen können wir in der Mengentheorie nicht führen, da die Mengentheorie keinerlei Struktur respektiert.

Nehmen wir zum Beispiel die Menge aller Vektorräume. Aus der Linearen Algebra kennt man, daß zwei Vektorräume gleich im Sinne der Linearen Algebra oder *isomorph* sind, wenn es eine bijektive lineare Abbildung zwischen ihnen gibt. Dabei respektiert eine *lineare Abbildung* die zugrundeliegende lineare Struktur von Vektorräumen.

Zwei isomorphe Vektorräume, zwischen denen wir die linearen Abbildungen betrachten, können als Elemente der Menge aller Vektorräume verschieden sein, dennoch sind sie aus Sicht der Theorie linearer Räume äquivalent. Um also diese Äquivalenz mathematisch beschreiben zu können, sprengen wir den Rahmen der Theorie der Mengen.

Soeben haben wir schon unser erstes Beispiel einer Kategorie kennengelernt. Diese Art der Betrachtungsweise ist also der mathematische Grund, den Begriff einer Menge auf den Begriff einer Kategorie zu erweitern.

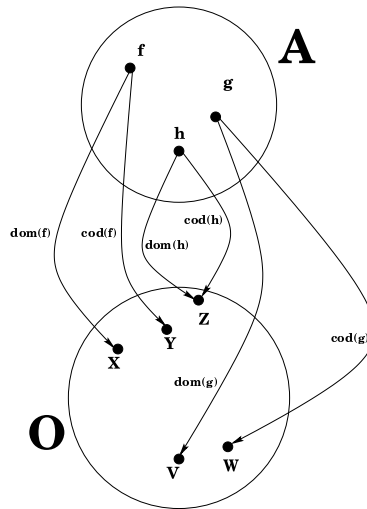
Eine Kategorie besteht dabei aus sogenannten *Objekten*, die ihrerseits wiederum Mengen sein können. Zwischen diesen Objekten existieren weiterhin komponierbare Abbildungen, sogenannte *Pfeile* oder *Morphismen*, die ihrerseits bestimmte Eigenschaften erfüllen müssen. Diese beiden Strukturen zusammengenommen ergeben eine Kategorie. Ebenso wie zwischen zwei Mengen Abbildungen existieren können, so existieren zwischen zwei Kategorien ebenfalls Abbildungen, sogenannte *Funktoren*.

Doch nun sind wir an einem Punkt angelangt, der eine Definition des Begriffes der *Kategorie* benötigt.

Die Theorie der Kategorien erwuchs aus der graphischen Darstellung mathematischer Bedingungen durch kommutative Diagramme. Einer der Väter dieser diagrammatischen Darstellung ist Saunders Mac Lane. Wir werden zur Definition einer Kategorie zuerst eine Sprache benutzen, die aus dieser diagrammatischen Sichtweise stammt. Zuerst benötigen wir jedoch noch die Definition eines *gerichteten Graphen*.

Ein *gerichteter Graph* ist eine "Vereinigung" einer Menge O , Objekte genannt, und einer Menge A , Pfeile genannt, zusammen mit zwei Abbildungen $\text{dom} : A \rightarrow O$, $\text{cod} : A \rightarrow O$. Wir bezeichnen $\text{dom}(f) \forall f \in A$ als *Domäne* und $\text{cod}(f) \forall f \in A$ als *Kodomäne* eines Pfeiles $f \in A$.

Wir können einen gerichteten Graphen auf folgende Weise graphisch darstellen:



(2.1)

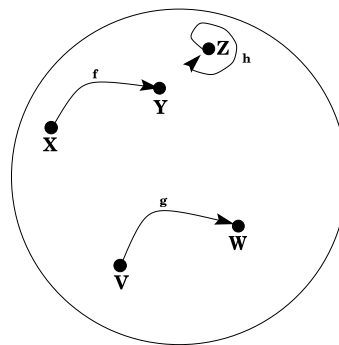
Wenn wir die graphische Darstellung eines gerichteten Graphen interpretieren sehen wir, daß die Bezeichnungen “Pfeile”, “Domäne” und “Kodomäne” nicht willkürlich gewählt sind.

Betrachten wir einen Pfeil $f \in A$, so sind diesem Pfeil zwei (möglicherweise identische!) Objekte, nämlich die Domäne $X := \text{dom}(f)$ und die Kodomäne $Y := \text{cod}(f)$, zugeordnet, deren “Bindeglied” der Pfeil f ist. Graphisch können wir dies wie folgt interpretieren:

$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad (2.2)$$

wodurch die Nomenklatur “Pfeil” für $f \in A$ deutlich wird.

Dabei ist eine Richtung durch die Wahl zweier Abbildungen dom, cod vorgegeben, die beliebig aber fest gewählt werden kann. Wir definieren: Ein Pfeil bildet seine Domäne auf seine Kodomäne ab. Dadurch können wir den Beispielgraphen (2.1) wie folgt interpretieren:



(2.3)

Mit Hilfe des Begriffes eines Graphen definieren wir eine Kategorie auf folgende Weise [21]:

Def 2.1.1. Eine **Kategorie** C ist ein gerichteter Graph mit zwei weiteren Funktionen

$$\begin{aligned} id : O &\longrightarrow A \\ c &\longmapsto id_c \end{aligned} \quad (2.4)$$

und

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ \langle g, f \rangle &\longmapsto g \circ f \quad , \end{aligned} \quad (2.5)$$

Identität und Verknüpfung genannt, so daß

$$\begin{aligned} \text{dom}(id_a) &= a = \text{cod}(id_a) \\ \text{dom}(g \circ f) &= \text{dom}(f) \\ \text{cod}(g \circ f) &= \text{cod}(g) \end{aligned} \quad (2.6)$$

für alle Objekte $a, c \in O$ und alle verknüpfbaren Paare von Pfeilen $\langle f, g \rangle \in A \times A$, so daß das Assoziativitätsgesetz

$$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f \quad (2.7)$$

und die Einsbedingung

$$\begin{aligned} id_b \circ f &= f & \forall a, b \in O, \quad \forall f : a \rightarrow b \\ g \circ id_a &= g & \forall a, b \in O, \quad \forall g : a \rightarrow b \end{aligned} \quad (2.8)$$

erfüllt sind.

In der modernen Literatur bezeichnet man die Pfeile im allgemeinen als *Morphismen*. Trotzdem ist diese ältere Notation sehr intuitiv, wenn wir uns Beweise in der Theorie der Kategorien betrachten. Die zu beweisenden Eigenschaften werden dort nämlich überwiegend in diagrammatischer Form angegeben. Wir werden im folgenden nicht zwischen beiden Notationen unterscheiden, benutzen aber in der Regel den Begriff *Morphismus*.

Weiterhin werden wir auch nicht zwischen den in der Literatur üblichen Schreibweisen

$$c \in O \equiv c \in \mathbf{Ob}(C) \equiv c \in C \quad (2.9)$$

oder

$$f \in A \equiv f \in \mathbf{Mor}(C) \equiv f \in C \quad (2.10)$$

unterscheiden.

Weiterhin definieren wir

$$\text{hom}(a, b) := \{f \in \mathbf{Mor}(C) \mid \text{dom}(f) = a, \text{cod}(f) = b\}. \quad (2.11)$$

Wir werden diese Menge als *Hom-Menge* oder äquivalent als *Homomorphismen von a nach b* anstatt Morphismen von a nach b bezeichnen. Einen bijektiven, also invertierbaren, Morphismus bezeichnen wir als *Isomorphismus*.

Man kann nun den Vorteil einer Kategorie gegenüber einer Menge erkennen: Morphismen erlauben es, verschiedene Objekte einer Kategorie miteinander zu vergleichen. Zwei isomorphe Objekte werden dabei als gleichbedeutend im Sinne der Kategorie bezeichnet, da sie bezüglich der die Kategorie definierenden Struktur dieselbe Eigenschaften haben (die Morphismen respektieren ja gerade die zugrundeliegende Struktur).

Wir wollen dazu ein paar Beispiele geben, die dies verdeutlichen.

Beispiele 2.1.1.

- a) Die Kategorie **Vec** der Vektorräume. Die Objekte sind alle Vektorräume und die Morphismen alle linearen Abbildungen zwischen ihnen.
- b) Die Kategorie **Top** der Topologischen Räume. Die Objekte sind alle Topologischen Räume und die Morphismen alle stetigen Abbildungen zwischen ihnen.
- c) Die Kategorie **Grp** der Gruppen. Objekte sind alle Gruppen, die Morphismen sind alle Gruppenhomomorphismen zwischen ihnen.

d) *Monoide: Ein Monoid ist eine Kategorie mit einem Objekt. Die Morphismen stellen dabei die Elemente des Monoids. Die Multiplikation des Monoids ist die Komposition von Morphismen und die Eins des Monoids ist der Identitätsmorphismus, der natürlich für dieses eine Objekt existieren muß.*

Achtung: nicht zu verwechseln mit einer monoidalen Kategorie!

Diese Beispiele werden wohl dem ein oder anderen Leser bekannt vorkommen, sind sie doch Grundlage vieler Mathematikvorlesungen.

Anhand dieser Beispiele wird die Eigenschaft von Kategorien deutlich, mathematische Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft zusammenzufassen. Mehr noch: die Morphismen erlauben einen Vergleich verschiedener Objekte miteinander. Was wäre ein Vektorraum ohne lineare Abbildungen oder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne ihre Diffeomorphismen?

Sinnvoll ist es daher immer, diese Objekte im Zusammenhang mit ihren Morphismen zu sehen, ansonsten gäbe es keine aussagefähige Mathematik.

Wechseln wir noch einmal zu den Mengen. Zwischen zwei verschiedenen Mengen können wir Funktionen definieren, was zu Gleichungen zwischen den Objekten dieser Mengen führt.

In der Kategorientheorie verlangen wir so etwas auch, nur nennen wir diese Abbildung einen *Funktor*. Dieser Funktor muß zwei Eigenschaften besitzen: Er muß sowohl die Objekte als auch die Morphismen der beiden Kategorien aufeinander abbilden.

Man definiert deshalb:

Def 2.1.2. *Ein Funktor F zwischen zwei Kategorien C, D ist eine Abbildung $F : C \longrightarrow D$, die jedes Objekt $c \in \mathbf{Ob}(C)$ auf ein Objekt $F(c) \in \mathbf{Ob}(D)$ und jeden Morphismus $g : c \longrightarrow c'$ auf $F(g) : F(c) \longrightarrow F(c')$ abbildet, so daß*

$$\begin{aligned} F(id_c) &= id_{F(c)} \\ F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \quad , \end{aligned} \tag{2.12}$$

falls die Komposition $g \circ f$ in C definiert ist.

Wie können wir so einen Funktor interpretieren?

Ein Funktor ist wie eine Übersetzung zwischen zwei Sprachen. Die eine ist die Sprache der Morphismen und Objekte der ersten Kategorie, die andere ist die Sprache der zweiten Kategorie.

Natürlich ist dies nur eine sehr unpräzise Aussage, sie trifft aber das Wesen solcher Funktoren.

Jede Kategorie war ja gerade eine Ansammlung von Objekten gleicher Eigenschaft. Der Funktor übersetzt also Aussagen aus der Sicht der einen Objekte in eine gleichwertige Aussage in der Sprache der Objekte einer anderen Kategorie. Ein Beispiel wird diese Aussage verdeutlichen:

Beispiele 2.1.2.

a) *Der Funktor $H_n : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Grp}$: Zu jeder natürlichen Zahl n bildet H_n einen Topologischen Raum X auf seine n -te Homologiegruppe $H_n(X)$ von X ab. Jeder Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ wird dabei auf $H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ abgebildet. Beispielsweise gilt für die 1-Sphäre: $H_n(S^1) = \mathbf{Z}$.*

Hier kann man schön die Eigenschaft eines Funktors erkennen: Er übersetzt topologische beziehungsweise geometrische Probleme in eine algebraische beziehungsweise gruppentheoretische Sprache. Das ist gerade die Strategie ganzer mathematischer Theorien wie der Algebraischen Topologie beziehungsweise der Algebraischen Geometrie.

Da wir uns in der Sprache der Kategorien befinden ist es naheliegend zu fragen, ob man Morphismen zwischen Funktoren definieren kann. Die Antwort ist ja. Solche Morphismen existieren und werden als *natürliche Transformationen* bezeichnet.

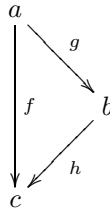
Def 2.1.3. *Seien C, D zwei Kategorien und $F, G : C \longrightarrow D$ zwei Funktoren, so definieren wir eine natürliche Transformation $\tau : F \longrightarrow G$ als ein Abbildung, die jedem Objekt $c \in \mathbf{Ob}(C)$ einen Morphismus $\tau_c : F(c) \longrightarrow G(c)$ in D zuordnet, so daß jeder Morphismus $f : c \longrightarrow c'$ in C das*

folgende Diagramm erfüllt:

$$\begin{array}{ccc}
 F(c) & \xrightarrow{\tau_c} & G(c) \\
 \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\
 F(c') & \xrightarrow{\tau_{c'}} & G(c')
 \end{array} \quad (2.13)$$

Ist dies erfüllt, so bezeichnen wir τ_c als "natürlich".

Natürliche Transformationen sollen auch die Komposition der Morphismen respektieren. Betrachten wir zum Beispiel folgende Morphismen



so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 S(a) & \xrightarrow{\tau_a} & T(a) & & \\
 \downarrow S(f) & \searrow S(g) & \downarrow T(f) & \searrow T(g) & \\
 & & S(b) & \xrightarrow{\tau_b} & T(b) \\
 \downarrow S(h) & \swarrow S(h) & \downarrow T(h) & \swarrow T(h) & \\
 S(c) & \xrightarrow{\tau_c} & T(c) & &
 \end{array}$$

Wir nennen die Morphismen τ_a, τ_b, τ_c die **Komponenten** der natürlichen Transformation τ . Falls jede Komponente τ_c in B invertierbar ist, so sprechen wir von einem **natürlichen Isomorphismus** τ . Diese natürlichen Isomorphismen werden uns bei der Konstruktion monoidaler Kategorien und Hopfkategorien wieder begegnen.

Jetzt haben wir ein erstes Gefühl dafür bekommen, welche Möglichkeiten man durch die Einführung von Kategorien erhält und welche Vorteile Kategorien gegenüber Mengen haben (immer vorausgesetzt, daß man an zusätzlichen Strukturen interessiert ist).

Nun wollen wir noch einmal kurz auf den Begriff der Kategorifizierung zurückkommen. Wir haben gesagt, daß wir Kategorien als Kategorifizierung von Mengen ansehen können. Das heißt, Kategorifizierung ermöglicht uns eine Klassifizierung und einen Vergleich mengentheoretisch verschiedener Elemente.

Eine Kategorifizierung ist eine Übersetzung von einem mengentheoretischen Kontext in einen kategorientheoretischen Kontext, wie es L. Crane formuliert.

Wir geben jetzt eine kurze Anleitung, auf welche Art wir dies erreichen können [17]:

Mengentheoretischer Kontext	Kategorifizierung
Elemente	Objekte
Gleichungen zwischen Elementen	Isomorphismen zwischen Objekten
Mengen	Kategorien
Funktionen	Funktoren
Gleichungen zwischen Funktionen	Natürliche Isomorphismen zwischen Funktoren

(2.14)

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden uns immer wieder Kategorifizierungen algebraischer Objekte, wie Vektorräume und Algebren, begegnen. Wichtig ist, daß man eine Vorstellung davon hat, warum man dies tut.

Doch zunächst wollen wir die Kategorifizierung von Kategorien definieren: die sogenannten 2-Kategorien.

2.2 2-Kategorien

In dem letzten Kapitel haben wir gesehen, daß eine Kategorie aus Objekten und Morphismen (Pfeilen) als Abbildungen zwischen den einzelnen Objekten besteht. Unsere Sichtweise von Kategorien ist geprägt durch den Begriff der Kategorifizierung, der eine Übersetzung eines mengentheoretischen Kontextes in die Sprache der Kategorien darstellt. Aus dieser Sichtweise interpretieren wir Kategorien als eine Kategorifizierung von Mengen.

Was passiert allerdings, wenn wir versuchen, eine Kategorie selbst zu kategorifizieren? Oder anders ausgedrückt, was passiert, wenn wir die Morphismen einer Kategorie als Objekte einer neuen Kategorie ansehen? Wenn wir Morphismen einer alten Kategorie als Objekte einer neuen Kategorie ansehen, werden wir neue Morphismen dieser neuen Objekte definieren müssen, also sozusagen “Morphismen von Morphismen”.

Eine weitere Frage ist, ob eine solche Konstruktion überhaupt Sinn macht. Diese Fragen wollen wir nun in diesem Kapitel beantworten.

Die Kategorie, die durch Kategorifizierung einer Kategorie entsteht, bezeichnen wir als 2-Kategorie. Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit alle mathematischen Konstrukte, die wir als Kategorifizierung einer bestimmten Menge definiert haben, als 2-Menge bezeichnen. Die Kategorifizierung einer Algebra bezeichnen wir demnach als 2-Algebra.

In einer 2-Kategorie vergessen wir nicht die ursprünglich zugrundeliegende Struktur, auch wenn wir die Morphismen der “ursprünglichen” Kategorie als Objekte einer neuen Kategorie ansehen, so bezeichnen wir sie immer noch als Morphismen. Die Objekte der ursprünglichen Kategorie sind ebenfalls wieder die Objekte der 2-Kategorie. Die “Morphismen der Morphismen” bezeichnen wir als 2-Morphismen. Die 2-Morphismen werden ihrerseits einige Bedingungen zu erfüllen haben, die wir als *Kohärenzen* bezeichnen.

Beginnen wir jetzt mit der Definition einer 2-Kategorie.

Sei C eine Kategorie, $a, b \in \mathbf{Ob}(C)$ zwei beliebige Objekte und $f, g \in \text{Hom}(a, b)$ zwei Morphismen zwischen a und b . Da die Morphismen f, g beide zwischen den gleichen Objekten a, b abbilden, bezeichnen wir sie in Anlehnung an die graphische Interpretation von Kategorien als *parallele Pfeile* oder *parallele Morphismen*.

Wir definieren einen 2-Morphismus α als Morphismus mit $\text{dom}(\alpha) = f$ und $\text{cod}(\alpha) = g$:

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & g &
 \end{array} . \quad (2.15)$$

Im Gegensatz zu Kategorien sind die 2-Morphismen einer 2-Kategorie Abbildungen zwischen Morphismen, die ihrerseits wieder verknüpft werden können. Diese Verknüpfung von Morphismen muß natürlich von den 2-Morphismen berücksichtigt werden. Zusätzlich verlangen wir noch eine Verknüpfung der 2-Morphismen, da dies eine definierte Eigenschaft von Morphismen ist (die 2-Morphismen waren ja gerade als Morphismen von Morphismen definiert worden).

Als Resultat werden wir zwei verschiedene Verknüpfungen von 2-Morphismen definieren, die wir aufgrund ihrer graphischen Darstellung als *vertikale* und *horizontale* Komposition bezeichnen.

Sei β ein 2-Morphismus zwischen den parallelen Pfeilen $f', g' \in \text{Hom}(b, c)$

$$\begin{array}{ccc}
 a & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & b \\
 & &
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \beta \\ \curvearrowleft \end{array} & c \\
 & &
 \end{array} .$$

Da $\langle f, f' \rangle, \langle g, g' \rangle$ verknüpfbare Morphismen sind, so müssen die 2-Morphismen α, β die Verknüpfungen $f' \circ f$ und $g' \circ g$ respektieren. Wir definieren deshalb eine *horizontale Verknüpfung*

“ \circ ” von $\alpha, \beta: \beta \circ \alpha : f' \circ f \longrightarrow g' \circ g$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{f'} & c \\
 \Downarrow \beta & & \\
 g' & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f' \circ f} & c \\
 \Downarrow \beta \circ \alpha & & \\
 g' \circ g & &
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \quad (2.16)$$

Die *horizontale Verknüpfung* ist also eine Folgerung aus den Eigenschaften der Morphismen der 2-Kategorie.

Wir müssen allerdings zusätzlich zu der horizontalen Verknüpfung noch eine Verknüpfung von 2-Morphismen definieren die aus der Tatsache resultiert, daß die 2-Morphismen ebenfalls Morphismeneigenschaft besitzen.

Betrachten wir dazu drei parallele Pfeile $f, g, h \in \text{Hom}(a, b)$ und zwei 2-Morphismen $\alpha : f \rightarrow g, \beta : g \rightarrow h$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & & \\
 \Downarrow \beta & & \\
 h & &
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \quad (2.17)$$

Wir definieren eine Verknüpfung “ \bullet ”, die wir *vertikale Verknüpfung* nennen, als eine Abbildung $\beta \bullet \alpha : f \rightarrow h$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \beta \bullet \alpha & & \\
 h & &
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \quad (2.18)$$

Somit besitzen 2-Morphismen zwei verschiedene Möglichkeiten der Verknüpfung. Wenn man von Verknüpfungen von Morphismen spricht, so sind automatisch auch Einsabbildungen (Einsmorphisismen) mit jeder Art der Verknüpfung verbunden. Beginnen wir bei der Suche nach den Eins-2-Morphismen zu der horizontalen Verknüpfung “ \circ ”. Wir definieren die Eins bezüglich $\circ, \mathbf{1}$, als einen 2-Morphismus $\alpha \circ \mathbf{1} = \mathbf{1} \circ \alpha = \alpha$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 \Downarrow \mathbf{1} & & \\
 \text{id}_a & &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.19)$$

mit den gewünschten Eigenschaften

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 \Downarrow \mathbf{1} & & \\
 \text{id}_a & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{\text{id}_b} & b \\
 \Downarrow \mathbf{1} & & \\
 \text{id}_b & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & &
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \quad (2.20)$$

Äquivalent einer Kategorie, bei der jedes Objekt einen eigenen Identitätsmorphismus besitzt, definieren wir für jeden Morphismus f einer 2-Kategorie einen Eins-2-Morphismus $\mathbf{1}_f : f \rightarrow f$ bezüglich der vertikalen Verknüpfung \bullet . Dabei erfüllt $\mathbf{1}_f$ folgende Eigenschaften

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \mathbf{1}_f & & \\
 f & & \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & & \\
 \Downarrow \mathbf{1}_g & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 g & &
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \quad (2.21)$$

Nun müssen wir nur noch prüfen, ob sich die beiden Verknüpfungen gegenseitig respektieren. Zuerst verlangen wir, daß die horizontale Verknüpfung zweier vertikaler Einsen wieder eine vertikale Eins ist: $\mathbf{1}_f \circ \mathbf{1}_h = \mathbf{1}_{h \circ f}$:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \mathbf{1}_f & & \\
 a & \xrightarrow{f} & b
 \end{array}
 \circ
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{h} & c \\
 \Downarrow \mathbf{1}_h & & \\
 b & \xrightarrow{h} & c
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{h \circ f} & c \\
 \Downarrow \mathbf{1}_{h \circ f} & & \\
 a & \xrightarrow{h \circ f} & c
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \tag{2.22}$$

Dann untersuchen wir Verknüpfungen, die sowohl vertikale als auch horizontale Verknüpfungen beinhalten. Dazu betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \Downarrow \alpha & & \\
 a & \xrightarrow{g} & b \\
 \Downarrow \beta & & \\
 a & \xrightarrow{h} & b
 \end{array}
 & \circ &
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{f'} & c \\
 \Downarrow \alpha' & & \\
 b & \xrightarrow{g'} & c \\
 \Downarrow \beta' & & \\
 b & \xrightarrow{h'} & c
 \end{array}
 .
 \end{array}
 \tag{2.23}$$

Bei diesem Diagramm soll die Reihenfolge der Verknüpfungen vertauschbar sein. Es soll also gleichgültig sein, ob man zuerst horizontal und dann vertikal verknüpft oder umgekehrt. Formal bedeutet diese Bedingung, daß

$$(\beta' \circ \beta) \bullet (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' \bullet \alpha') \circ (\beta \bullet \alpha) .
 \tag{2.24}$$

Somit haben wir Axiome zur Überprüfung der Verträglichkeit der beiden Verknüpfungen aufgestellt.

Wir haben nun alle Strukturen definiert und diskutiert, die zur Definition einer 2-Kategorie notwendig sind. Fassen wir nun noch einmal zusammen, was wir über 2-Kategorien gesagt haben:

Def 2.2.1. Eine **2-Kategorie** C ist eine Kategorie C zusammen mit 2-Morphismen, die eine horizontale Verknüpfung “ \circ ” mit einer horizontalen Eins $\mathbf{1}$ und eine vertikale Verknüpfung “ \bullet ” mit vertikaler Eins $\mathbf{1}_f$ bezüglich jedes Morphismus f besitzt, so daß die Axiome (2.20, 2.21, 2.22, 2.24) erfüllt sind. Sind die Verknüpfungen der Morphismen einer 2-Kategorie bis auf die Wirkung eines 2-Morphismus nicht assoziativ, so bezeichnen wir die 2-Kategorie als **schwach**.

Wir haben gesehen, daß das Hinzufügen von 2-Morphismen zu einer Kategorie einige Zusatzbedingungen für diese 2-Morphismen hervorbringt. Gibt es die Möglichkeit, eine Kategorifizierung einer 2-Kategorie zu definieren?

Die Antwort ist “ja”, aber aufgrund der neuen Strukturen, die eine 2-Kategorie gegenüber einer Kategorie hervorbringt, kann man sich vorstellen, daß die zusätzlichen Strukturen der Kategorifizierung einer 2-Kategorie immer unübersichtlicher werden. Betrachten wir zum Beispiel die graphische Darstellung einer 2-Kategorie. Die Objekte einer 2-Kategorie (oder einer Kategorie) stellen wir graphisch als nulldimensionale “Punkte” dar. Die Morphismen einer Kategorie sind als eindimensionale Pfeile dargestellt. Die 2-Morphismen entsprechen zweidimensionalen Zellen. Dabei erhält jeder (2-)Morphismus für jede Dimension seiner graphischen Darstellung eine Verknüpfung, also jeweils eine Verknüpfung für die Morphismen und zwei Verknüpfungen für die 2-Morphismen, wobei jede Verknüpfung ein Einselement benötigt. Wenn wir dieses Spiel weiterspielen und 3-Morphismen zwischen zwei 2-Morphismen einführen, so kann der Leser sich vorstellen, daß die Definition der zusätzlichen Struktur zusammen mit den zu erfüllenden Kohärenzen immer komplizierter wird. 3-Morphismen müßten demnach graphisch als dreidimensionale Zellen dargestellt werden, zusammen mit drei Verknüpfungen, jeweils mit einem neuen Einselement. Schon im Fall von 4-Morphismen gestaltet sich die graphische Darstellung als vierdimensionale Zellen äußerst kompliziert. Darüberhinaus müssen eine große Menge an Kohärenzen für die entstehenden Verknüpfungen und Einsen erfüllt werden. Ein Alptraum entsteht wenn wir versuchen, allgemeine n -Kategorien zu definieren. Dazu fehlen uns sowohl die graphischen Mittel als auch eine Übersicht über die zugehörigen Kohärenzen.

Dennoch gibt es sinnvolle Definitionen von n -Kategorien. Man behilft sich dabei mit einem Trick: Man definiert n -Kategorien über sogenannte *Operaden*¹ und damit verknüpfte *Opetope* [16]. n -Kategorien, deren $(n - 1)$ -Morphismen bis auf die Wirkung eines n -Morphismus die Assoziativität ihrer Verknüpfungen verletzen, bezeichnen wir als *schwach*.

Welchen Vorteil haben wir jedoch durch die Definition von n -Kategorien?

Die Motivation zur Einführung von Kategorien war der Vorteil gegenüber der Mengentheorie, Objekte einer Kategorie vergleichen zu können, also als “ähnlich im Sinne der Kategorie” zu bezeichnen. Diese Ähnlichkeit oder Isomorphie unterscheidet sich stark von der Gleichheit zweier Objekte: Zwei ähnliche oder isomorphe Objekte sind zwar nicht gleich, erfüllen aber aus Sichtweise der Kategorie dieselbe Eigenschaft. Als bekanntes Beispiel kann die Isomorphie zweier Vektorräume der Kategorie **Vec** angegeben werden.

Die Einführung von 2-Kategorien ist genau dann sinnvoll, wenn man zwei Morphismen miteinander vergleichen will. Dies wird am besten anhand von Beispielen deutlich:

Beispiele 2.2.1.

- a) Die 2-Kategorie **Cat**, deren Objekte alle Kategorien und deren Morphismen alle Funktoren zwischen ihnen sind. Die 2-Morphismen sind gerade die natürlichen Transformationen zwischen den Funktoren.
- b) Die 2-Kategorie $\Pi_2(X)$, der fundamentale 2-Groupoid, deren Objekte die Punkte eines topologischen Raumes X und deren Morphismen $\text{hom}(x, y)$ die Kurven $f : [0, 1] \rightarrow X$ sind, die im Punkt x starten und im Punkt y enden. Die 2-Morphismen zwischen zwei Morphismen $f, g \in \text{hom}(x, y)$ sind gerade die Klassen von Homotopien der Wege in $\text{hom}(x, y)$, die im Morphismus f starten und im Morphismus g enden.
Dabei ist die Verknüpfung von Kurven nur Assoziativ bis auf Homotopieklasse, so daß wir ein Beispiel für eine schwache 2-Kategorie haben.

Am besten sieht man den Vorteil der zusätzlichen Struktur der 2-Kategorie aus Beispiel b), wenn man diese Struktur als “normale” Kategorie definiert:

Die Kategorie $\Pi_1(X)$, fundamentaler Groupoid genannt, ist eine Kategorie, deren Objekte die Punkte eines topologischen Raumes X und deren Morphismen $\text{hom}(x, y)$ die Äquivalenzklassen (bezüglich der Homotopie) von Kurven $f : [0, 1] \rightarrow X$ sind, die im Punkt x starten und im Punkt y enden.

Wir sehen, daß die 2-Kategorie $\Pi_2(X)$ als Zusatzstruktur die Homotopien von Kurven eines topologischen Raumes enthält. Diese Homotopien sind ein Bestandteil der Beschreibung topologischer Räume. Historisch ist $\Pi_2(X)$ der Ursprung der Idee, 2-Kategorien einführen zu wollen.

Mit den 2-Kategorien haben wir ein Beispiel für eine Kategorifizierung diskutiert.

Im nächsten Kapitel wollen wir ein weiteres Beispiel für eine Kategorifizierung einführen: die *monoidale Kategorie* oder auch *2-Monoid* genannt.

Mit der *monoidalen Kategorie* werden wir gleichzeitig die Möglichkeit der “Multiplikation” von Objekten einer Kategorie einführen. Dieses “Produkt” wird in der kategorientheoretischen Untersuchung von Renormierung eine zentrale Rolle spielen.

2.3 Monoidale Kategorien

In diesem Kapitel wollen wir als weiteres Beispiel für *Kategorifizierung* die Kategorifizierung eines Monoids betrachten.

Ein Monoid ist eine Menge M zusammen mit einer assoziativen Multiplikation $\cdot : M \times M \rightarrow M$ mit Eins 1.

Wir werden nun versuchen, die Konstruktion eines Monoids zu kategorifizieren. Die Tabelle 2.14 gibt uns einen Leitfaden, wie wir dabei vorzugehen haben.

Beginnen wir mit der Menge M . Diese Menge wird durch eine Kategorie C ersetzt. Das heißt, daß die Elemente der Menge M durch Objekte der Kategorie C ersetzt werden. Dabei gibt es ein ausgezeichnetes Element der Menge M : die Eins 1 bezüglich der Multiplikation. Diesem Element

¹Die Definition einer Operade werden wir in einem späteren Kapitel nachholen.

müssen wir ein ausgezeichnetes Objekt I zuordnen, das sogenannte *Einsobjekt* der Kategorie C . Dabei wird I zusätzliche Eigenschaften der Eins 1 erben, die wir noch diskutieren werden.

Weiterhin haben wir eine binäre Abbildung $\cdot : M \times M \rightarrow M$, das Produkt des Monoids. Diese Abbildung ersetzen wir durch einen binären Funktor $\otimes : C \times C \rightarrow C$, den wir als *monoidales Produkt* der Kategorie C bezeichnen. Da wir uns in der Sprache der Kategorien bewegen sind wir in der Lage, Gleichungen in der Theorie der Monoide durch Äquivalenzen zu ersetzen. Wir können deshalb annehmen, daß das monoidale Produkt nur assoziativ bis auf einen natürlichen Isomorphismus

$$a = a_{x,y,z} : x \otimes (y \otimes z) \cong (x \otimes y) \otimes z \quad , \quad (2.25)$$

den sogenannten *Assoziator*, ist. Wir müssen aber noch Kohärenzbedingungen für den Assoziator fordern, denn bei dem monoidalen Produkt von vier Objekten treten erstmals “Probleme” durch mehrere Möglichkeiten der Multiplikationsreihenfolge, also der “Klammerung”, auf. Aus diesem Grunde muß der Assoziator “a” die sogenannte *Pentagongleichung*

$$\begin{array}{ccc} w \otimes (x \otimes (y \otimes z)) & \xrightarrow{a=a_{w,x,y \otimes z}} & (w \otimes x) \otimes (y \otimes z) \xrightarrow{a=a_{w \otimes x,y,z}} & ((w \otimes x) \otimes y) \otimes z & (2.26) \\ \downarrow \text{id} \otimes a_{x,y,z} & & & \downarrow a_{w,x,y} \otimes \text{id} \\ w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) & \xrightarrow{a=a_{w,x \otimes y,z}} & & (w \otimes (x \otimes y)) \otimes z \end{array}$$

erfüllen.

In einer monoidalen Kategorie ist die Assoziativität auf eine kontrollierte Art und Weise verletzt, das heißt, daß eine monoidale Kategorie eine Einführung von *quasi*² assoziativen Produkten erlaubt, was im “unkategorifizierten” Fall eines Monoids nicht möglich ist. Natürlich existiert auch der triviale Fall $a \equiv \text{id}$, bei dem das monoidale Produkt \otimes assoziativ ist.

Da das monoidale Produkt \otimes nicht notwendigerweise assoziativ ist, müssen wir ein besonderes Augenmerk auf das Einsobjekt I werfen. Ebenso wie bei der Assoziativität des Produktes können wir hier die Eigenschaft des Einsobjektes, gleichzeitig links- und rechts-Einsobjekt zu sein, auf die Wirkung zweier natürlicher Isomorphismen reduzieren. Dies ist aufgrund der eventuell fehlenden Assoziativität sogar notwendig.

Wir definieren deshalb zwei natürliche Transformationen l, r , die wir *links-* und *rechts-Einsbedingung* nennen, wie folgt:

$$\begin{aligned} l_x : I \otimes x &\cong x & (2.27) \\ r_x : x \otimes I &\cong x \quad . \end{aligned}$$

Die beiden Einsbedingungen müssen dabei die Wirkung des Assoziators a respektieren, das heißt, die Einsbedingungen müssen das Dreieckaxiom

$$\begin{array}{ccc} x \otimes (I \otimes y) & \xrightarrow{a_{x,I,y}} & (x \otimes I) \otimes y & (2.28) \\ & \searrow \text{id} \otimes l & \swarrow r \otimes \text{id} \\ & & x \otimes y \end{array}$$

und die Gleichungen

$$l_I = r_I : I \otimes I \longrightarrow I \quad (2.29)$$

erfüllen.

Wir haben also die Struktur eines Monoids kategorifiziert. Fassen wir noch einmal die definierten Strukturen zusammen:

²Der Begriff *quasi* bezieht sich auf die Tatsache, daß das monoidale Produkt die Assoziativität nicht willkürlich sondern kontrollierbar verletzt.

Def 2.3.1. Eine **monoidale Kategorie** oder **2-Monoid** “ B ” ist ein Tupel (B, \otimes, I, a, l, r) , wobei B eine Kategorie mit **Einsobjekt** I ist, die mit einem Bifunktor $\otimes : B \times B \rightarrow B$, dem **monoidalen Produkt**, zusammen mit drei natürlichen Isomorphismen, dem **Assoziator**

$$a = a_{x,y,z} : x \otimes (y \otimes z) \cong (x \otimes y) \otimes z \quad (2.30)$$

und den **links- und rechts Einsbedingungen**

$$\begin{aligned} l_x : I \otimes x &\cong x \\ r_x : x \otimes I &\cong x \end{aligned} \quad (2.31)$$

ausgestattet ist, wobei der Assoziator die **Pentagongleichung** (2.26) und die Einsbedingungen l, r das **Dreieckaxiom** (2.28) und die Bedingung (2.29) erfüllen.

Monoidale Kategorien werden in der Literatur oft auch als *Tensor-kategorien* bezeichnet (zum Beispiel in [24]). In dieser Arbeit wollen wir jedoch die Bezeichnung *monoidale Kategorie* beibehalten, da wir eine monoidale Kategorie als Kategorifizierung eines Monoids verstehen. Außerdem werden wir ein Tensorprodukt auf speziellen Kategorien einführen, das keinen Zusammenhang mit dem monoidalen Produkt haben wird.

Betrachten wir nun *monoidale Funktoren*, die eine monoidale Kategorie auf eine andere monoidale Kategorie strukturerhaltend abbilden. Diese monoidalen Funktoren werden zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen. Wir führen daher einen *monoidalen Funktor* oder *Morphismus monoidaler Kategorien*

$$T : (B, \otimes, I, \alpha, l, r) \longrightarrow (B', \otimes', I', \alpha', l', r') \quad (2.32)$$

ein, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} T(a \otimes b) &= T(a) \otimes' T(b) & \forall a, b \in \mathbf{Ob}(B) \\ T(f \otimes g) &= T(f) \otimes' T(g) & \forall f, g \in \mathbf{Mor}(B) \\ T(I) &= I' \\ T(\alpha) &= \alpha' \\ T(l) &= l', \quad T(r) = r' \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

In diesem Kapitel haben wir die monoidale Kategorie als Beispiel einer Kategorifizierung kennengelernt. Monoidale Kategorien sind dann eine sinnvolle Struktur, wenn man nichtassoziative Multiplikationen einführen will, die die Assoziativität bis auf die Wirkung einer Abbildung, dem Assoziator, verletzen. Monoidale Kategorien werden zum Beispiel zur Definition sogenannter *Quasi-Hopfalgebren* benutzt. Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Bedeutung eines solchen monoidalen Produktes für die kategorientheoretische Beschreibung von Renormierung untersuchen. Hierbei werden die Renormierungsschemata eine besondere Rolle spielen: Sie werden uns nicht nur als Morphismen sondern auch zur Definition eines monoidalen Produktes mit nichttrivialem Assoziator dienen.

Im nächsten Kapitel wollen wir weitere Möglichkeiten diskutieren, wie wir die Struktur einer Kategorie erweitern können.

2.4 Hom-Mengen, additive Kategorien und Bereicherungen

Unsere Definition einer Kategorie war unter anderem von der diagrammatischen Interpretation der Morphismen und der Kohärenzen geprägt. Der Fokus der Definition einer Kategorie lag dabei auf der Menge der Objekte. Wir wollen nun eine alternative Definition einer Kategorie geben, bei der wir den Fokus der Definition auf die Morphismen einer Kategorie legen werden.

Wir werden sehen, daß diese alternative Definition des Begriffes der Kategorie Anlaß zur “*Bereicherung*”³, also zur Erweiterung, der Struktur einer Kategorie geben wird. Diese Bereicherungen

³Engl. *enrichement*

ermöglichen uns die Definition von *2-Vektorräumen*, *additiven Kategorien* und einem *Tensorprodukt*.

Basieren wird diese alternative Definition auf den *Hom-Mengen* einer Kategorie, die wir bereits in dem ersten Kapitel (2.11) eingeführt haben. Sei dazu C eine Kategorie, $a, b \in \mathbf{Ob}(C)$ zwei Objekte der Kategorie C . Wir definieren die *Hom-Menge* $\text{hom}(a, b)$ wie folgt:

$$\text{hom}(a, b) := \{f \mid f \in \mathbf{Mor}(C) : f : a \longrightarrow b\} . \quad (2.34)$$

Durch die Domäne und die Kodomäne der Homomorphismen einer Hom-Menge sind zwei Objekte der Kategorie C eindeutig festgelegt.

Mit Hilfe der Hom-Mengen können wir nun eine alternative Definition einer Kategorie geben:

Def 2.4.1. *Ein Kategorie C ist eine Menge von Objekten $\{a, b, c, \dots\}$ zusammen mit einer Abbildung, die jedem geordneten Paar $\langle a, b \rangle$ von Objekten eine Menge $\text{hom}(a, b)$ zuordnet, welche für je zwei verschiedene Paare von Objekten disjunkt sind, also falls $\langle a, b \rangle \neq \langle c, d \rangle$ gilt $\text{hom}(a, b) \cap \text{hom}(c, d) = \emptyset$. Zu jedem geordneten Tripel von Objekten $\langle a, b, c \rangle$ existiert eine Abbildung*

$$\text{hom}(b, c) \times \text{hom}(a, b) \longrightarrow \text{hom}(a, c) ,$$

Verknüpfung genannt,

$$\langle g, f \rangle \mapsto g \circ f \quad g \in \text{hom}(b, c), f \in \text{hom}(a, b) , \quad (2.35)$$

die assoziativ ist

$$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f . \quad (2.36)$$

Zu jedem Objekt $c \in \mathbf{Ob}(C)$ existiert ein Element $1_c \in \text{hom}(c, c)$, die sogenannte Eins von c , so daß $1_b \circ f = f$ und $g \circ 1_b = g$ für jedes $f \in \text{hom}(a, b)$, $g \in \text{hom}(b, c)$ gilt.

Worin liegt nun der Vorteil dieser Definition einer Kategorie?

Viele zusätzliche Strukturen von Kategorien lassen sich durch Veränderung der Struktur von Hom-Mengen definieren. Wir nennen dieses Vorgehen *Bereicherung einer Kategorie*. Bei der Bereicherung einer Kategorie gehen wir wie folgt vor: Bei einer Kategorie ohne zusätzliche Struktur sind die Hom-Mengen gerade einfache Mengen, die man als Objekte der Kategorie **set** aller Mengen ansehen kann. Die Definition einer Kategorie bleibt auch weiterhin gültig wenn wir annehmen, daß die Hom-Mengen nicht nur einfache Mengen sondern zum Beispiel Kategorien, also Objekte der Kategorie **cat** aller Kategorien, sind. Wir bezeichnen eine Kategorie, deren Morphismen Objekte der Kategorie **cat** sind, als *Kategorien bereichert durch cat*. Alternativ können wir auch sagen, daß die Hom-Mengen durch **cat** bereichert sind.

Was erreichen wir durch die Bereicherung einer Kategorie durch **cat**?

Wir erreichen, daß die Morphismen der in **cat** bereicherten Kategorie ihrerseits Objekte einer Kategorie sind, also daß zwischen ihnen Morphismen existieren. Wir haben somit einen alternativen Zugang zu 2-Kategorien gefunden, indem wir die "Morphismen zwischen den Morphismen" als 2-Morphismen interpretieren.

In analoger Art und Weise können wir eine Kategorie durch eine beliebige andere Kategorie bereichern und erhalten somit eine zusätzliche Struktur.

Betrachten wir nun die Bereicherung einer Kategorie durch **Ab**, der Kategorie aller abelscher Gruppen. Durch die Bereicherung der Kategorie durch **Ab** besitzen alle Hom-Mengen $\text{hom}(a, b)$ die Struktur einer abelschen Gruppe, was bedeutet, daß wir Morphismen $f, f' \in \text{hom}(a, b)$ addieren können. Wir bezeichnen die abelsche Gruppe $\text{hom}(a, b)$ zur besseren Erkennung der Gruppenstruktur als $A(a, b)$.

Falls die Komposition von Morphismen *bilinear* ist, also

$$(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f' \quad (2.37)$$

gilt, bezeichnen wir eine durch **Ab** bereicherte Kategorie als *präadditive Kategorie* oder auch *Ab-Kategorie*.

Da jede abelsche Gruppe auch ein \mathbf{Z} -Ring ist, kann man auf den Hom-Mengen ein Tensorprodukt $\otimes_{\mathbf{Z}}$ einführen, so daß wir die Verknüpfung als linearen Morphismus

$$\circ : A(b, c) \otimes_{\mathbf{Z}} A(a, b) \longrightarrow A(a, c) \quad (2.38)$$

bezeichnen können.

Fassen wir noch einmal die Konstruktion einer Ab -Kategorie in einer Definition zusammen:

Def 2.4.2. Eine **Ab-Kategorie** oder auch **präadditive Kategorie** C ist eine Menge von Objekten $\{a, b, c, \dots\}$ zusammen mit einer Abbildung, die jedem geordneten Paar $\langle a, b \rangle$ von Objekten eine additive abelsche Gruppe $A(a, b)$ zuordnet. Für jedes geordnete Tripel $\langle a, b, c \rangle$ existiert ein Morphismus abelscher Gruppen $A(b, c) \otimes_{\mathbf{Z}} A(a, b) \longrightarrow A(a, c)$, der Verknüpfung genannt wird. Für jedes Objekt $a \in \mathbf{Ob}(C)$ existiert ein Morphismus abelscher Gruppen $\mathbf{Z} \longrightarrow A(a, a)$.

Ein **additiver Funktor** F ist ein Funktor $F : A \longrightarrow B$, wo A, B präadditive Kategorien sind, wobei F folgende Bedingung

$$F(f + g) = F(f) + F(g) \quad (2.39)$$

erfüllt.

Soweit die Definition präadditiver Kategorien. Um eine präadditive Kategorie zu einer *additiven Kategorie* zu erweitern, müssen wir noch weitere Strukturen für die Objekte und Morphismen präadditiver Kategorien einführen.

Wenn wir allgemeine Abbildungen zwischen Mengen betrachten, so können diese *injektiv* oder *surjektiv* sein. Gibt es vergleichbare Eigenschaften für die Morphismen einer Kategorie? Die Antwort zu dieser Frage führt uns zu der Definition von *monis*, *epis* und *zeros*.

Beginnen wir mit dem kategorientheoretischen Pendant injektiver Funktionen.

Sei $m : a \longrightarrow b$ ein Morphismus, $f_1, f_2 : d \longrightarrow a$ zwei parallele Morphismen. Wir bezeichnen m als *monic*, wenn aus der Gleichung $m \circ f_1 = m \circ f_2$ immer $f_1 = f_2$ folgt.

Ebenso definieren wir das kategorientheoretische Pendant zu surjektiven Abbildungen: Seien $g_1, g_2 : b \longrightarrow c$ zwei parallele Morphismen. Ein Morphismus $e : a \longrightarrow b$ ist *epi*, wenn aus der Gleichung $g_1 \circ e = g_2 \circ e$ immer $g_1 = g_2$ folgt.

Nachdem wir spezielle Morphismen ausgezeichnet haben, wollen wir nun besondere Objekte benennen.

Ein Objekt $t \in C$ bezeichnen wir als *terminal*, falls es für jedes Objekt $a \in C$ genau einen Morphismus $a \longrightarrow t$ mit Kodomäne t gibt.

Andererseits bezeichnen wir ein Element $i \in C$ als *initial*, falls es für jedes andere Element $c \in C$ genau einen Morphismus $i \longrightarrow c$ mit Domäne i gibt.

Ist ein Objekt $z \in C$ sowohl *initial* als auch *terminal*, so bezeichnen wir z als *Nullobjekt*.

Existiert in einer Kategorie C ein Nullobjekt $z \in C$, so existiert für jedes Paar von Objekten $a, b \in C$ ein wohldefinierter Morphismus

$$\begin{array}{ccc} & z & \\ a & \nearrow & \searrow & c \end{array} \quad (2.40)$$

den wir als *zero-Morphismus* oder *Nullmorphismus* bezeichnen.

Dabei ist folgendes zu Bemerkem: In einer präadditiven Kategorie C besitzt jede Hom-Menge $A(a, b)$ als abelsche Gruppe einen Nullmorphismus $0 : a \longrightarrow b$, selbst wenn C kein Nullobjekt besitzt.

Fahren wir nun in der Definition einer *additiven Kategorie* fort. Wir werden dabei nur referieren, wie eine additive Struktur auf einer Kategorie eingeführt wird. Beweise und Details dazu findet man in [21].

Nachdem wir eine präadditive Struktur für eine Kategorie C eingeführt haben, wollen wir nun eine direkte Summe für präadditive Kategorien definieren. Dabei werden wir, wie man es aus Algebra-Vorlesungen kennt, ein Produkt und ein Koprodukt für C einführen.

Sind drei Objekte $\{a, b, c\} \in \mathbf{Ob}(C)$ und vier Morphismen

$$\begin{array}{ccc}
 & c & \\
 p_1 \nearrow & & \nwarrow p_2 \\
 a & & b \\
 i_1 \searrow & & \swarrow i_2
 \end{array}
 \quad (2.41)$$

einer Ab -Kategorie C gegeben, so daß

$$p_1 \circ i_1 = 1_a, \quad p_2 \circ i_2 = 1_b, \quad i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1_c \quad (2.42)$$

erfüllt ist, so bezeichnen wir diese Struktur als *Biprodukt*diagramm.

Durch einen Vergleich mit Produkten und Koprodukten [25] nennen wir p_i eine *Projektion* und i_i eine *Injektion*.

Wir sind nun in der Lage, Produkte und Koprodukte zu definieren.

Ein Objekt $c \in \mathbf{Ob}(C)$ zusammen mit zwei Projektionen p_1, p_2 , die das Biproduktdiagramm erfüllen, bezeichnen wir als *Produkt* von a und b in der Kategorie C .

Umgekehrt bezeichnen wir ein Objekt c zusammen mit zwei Injektionen i_1, i_2 , die das Biproduktdiagramm erfüllen, als *Koprodukt* von a und b in c . Aufgrund der Universalitätseigenschaft von Koprodukt und Produkt [21, 25], gilt folgende Aussage:

Ist folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & c & \\
 p_1 \nearrow & & \nwarrow p_2 \\
 a & & b \\
 f_1 \searrow & & \swarrow f_2 \\
 & d &
 \end{array}
 \quad (2.43)$$

erfüllt, so existiert ein eindeutiger Morphismus $h \in A(d, c)$, für den gilt:

$$\begin{aligned}
 p_1 \circ h &= f_1 \\
 p_2 \circ h &= f_2 \quad ,
 \end{aligned}
 \quad (2.44)$$

was eine natürliche Eigenschaft eines Produktes ist. Also haben wir einen Morphismus abelscher Gruppen, $h \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle$, der ein Isomorphismus

$$A(d, c) \cong A(a, c) \oplus A(b, c) \quad (2.45)$$

ist, wobei \oplus die direkte Summe abelscher Gruppen darstellt.

Die direkte Summe einer Kategorie wird also auf der Stufe ihrer Objekte definiert.

Will man nun ein direktes Produkt für die ganze Kategorie definieren, so muß man sicherstellen, daß das direkte Produkt für alle Paare von Objekten der Ab -Kategorie C definiert ist.

Kann man also jedem Paar $\langle a, b \rangle \in C \times C$ einer Ab -Kategorie C ein Objekt $c = a \oplus b \in \mathbf{Ob}(C)$ zuordnen, so existiert ein Bifunktor

$$\oplus : C \times C \longrightarrow C \quad (2.46)$$

für die ganze Kategorie. Wir nennen \oplus die *direkte Summe* der Ab -Kategorie C .

Analog der direkten Summe in der Algebra [25] erfüllt die direkte Summe einer Ab -Kategorie eine Universalitätsbedingung: Sind zwei Morphismen $f_1 : a \longrightarrow a'$ und $f_2 : b \longrightarrow b'$ wie im folgenden

Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a \oplus b & & \\
 & \nearrow^{p_1} & & \nwarrow_{p_2} & \\
 a & & & & b \\
 \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_2 \\
 a' & & & & b' \\
 & \nwarrow_{p'_1} & & \nearrow^{p'_2} & \\
 & & a' \oplus b' & &
 \end{array}
 \quad (2.47)$$

gegeben, kann man eine Abbildung

$$f_1 \oplus f_2 : a \oplus b \longrightarrow a' \oplus b' \quad (2.48)$$

entweder durch die Gleichungen

$$p'_k \circ (f_1 \oplus f_2) = f_k \circ p_k \quad k = 1, 2 \quad (2.49)$$

für das Produkt $\oplus = \times$, oder durch die Gleichungen

$$(f_1 \oplus f_2) \circ i_k = i'_k \circ f_k \quad k = 1, 2 \quad (2.50)$$

für das Koprodukt $\oplus = \coprod$, definieren.

Da wir im Fall der *Ab*-Kategorien Produkt und Koprodukt über das Biproduktdiagramm (2.42) definieren, existiert ein natürlicher Isomorphismus, der das Produkt $a \times b$, das durch (2.49) definiert ist, und das Koprodukt $a \coprod b$, definiert durch (2.50), identifiziert.

Dabei ist nicht nur eine einfache direkte Summe einer präadditiven Kategorie möglich. Man kann auf iterative Weise ein mehrfaches direktes Produkt $\bigoplus_j c_j$ auf einer präadditiven Kategorie definieren, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden (2.53).

Mit der direkten Summe haben wir wieder ein Beispiel für die Kategorifizierung algebraischer Strukturen kennengelernt. Die direkte Summe war als zusätzliche Struktur einer präadditiven Kategorie definiert worden und ist ein zentraler Punkt zur Definition *additiver Kategorien*:

Def 2.4.3. Eine **additive Kategorie** C ist eine präadditive oder *Ab*-Kategorie zusammen mit einem Nullobjekt 0 , so daß für jedes Paar von Objekten aus C das Biproduktdiagramm (2.42) erfüllt ist.

Für die additive Struktur einer präadditiven Kategorie haben wir bereits einen *additiven Funktor* T definiert, der die Bedingung $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$ für zwei parallele Morphismen f_1, f_2 erfüllte.

Man kann zeigen [21], daß ein additiver Funktor T von einer additiven Kategorie A nach einer additiven Kategorie B ein Funktor ist, der jedes Biproduktdiagramm von A in ein Biproduktdiagramm der additiven Kategorie B überführt, also daß $T(f_1 \oplus f_2) = T(f_1) \oplus T(f_2)$ erfüllt ist.

Die additive Struktur auf einer Kategorie haben wir durch Bereicherung der Kategorie durch **Ab** erhalten. Wir werden im folgenden noch ein weiteres Beispiel einer Struktur kennenlernen, die durch Bereicherung einer Kategorie durch eine andere Kategorie entsteht.

Doch vorher wollen wir noch ein paar allgemeine Bemerkungen über höherdimensionale Algebra machen.

2.4.1 Kurze Bemerkungen über höherdimensionale Algebra

An dieser Stelle wollen wir ein paar Anmerkungen zu höherdimensionaler Algebra machen, da sich diese Arbeit im weiteren Verlauf mit solchen Strukturen beschäftigen wird. Höherdimensionale

Algebra beschäftigt sich mit kategorifizierten algebraischen Strukturen. Wir haben die Kategorifizierung schon in unserer Sichtweise von Kategorien, 2-Kategorien und monoidalen Kategorien kennengelernt. Dabei haben wir eine Kategorie als Kategorifizierung einer strukturlosen Menge interpretiert, wobei wir Kategorifizierung als Übersetzung eines mengentheoretischen Kontextes in die Sprache der Kategorien bezeichnet haben.

Als Kategorifizierung von Kategorien bekamen wir 2-Kategorien. Und hier liegt der Ursprung für die Namensgebung von höherdimensionaler Algebra. Die 2 von 2-Kategorien resultierte, wie schon in dem Kapitel über 2-Kategorien erwähnt, aus der 2-dimensionalen graphischen Darstellung der 2-Morphismen. Hier zeigt der Begriff *Dimension* an, "wie oft wir kategorifiziert haben". Analog zu dieser Namensgebung markieren wir jede kategorifizierte Struktur mit einer 2, zweimal kategorifizierte Strukturen mit einer 3 (zum Beispiel 3-Kategorien).

Höherdimensionale Algebra ist das mathematische Gebiet, daß sich mit (mehrfach) kategorifizierten algebraischen Strukturen beschäftigt. Die höherdimensionale Algebra untersucht dabei die Strukturen, die bei der Kategorifizierung entstehen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir "zweidimensionale" Strukturen, wie 2-Monoide, 2-Vektorräume, 2-Koalgebren, 2-Bialgebren und 2-Hopfalgebren betrachten und deren Bedeutung für Renormierungstheorie diskutieren.

2.5 2-Vektorräume

In diesem Kapitel wollen wir die Struktur von Vektorräumen kategorifizieren, was zu der Definition von 2-Vektorräumen führen wird.

Bei der Kategorifizierung von Vektorräumen müssen wir kategorientheoretische Äquivalente zu den Begriffen *k-linearität* und *Tensorprodukt* finden. Dabei wollen wir den Begriff *Tensorprodukt* im Zusammenhang mit 2-Vektorräumen nicht mit dem häufig als "Tensorprodukt" bezeichneten monoidalen Produkt einer monoidalen Kategorie verwechseln. Wir werden diese Verwechslung durch die Schreibweise des Tensorproduktes von 2-Vektorräumen vermeiden.

Beginnen wir mit der Kategorifizierung der *k-linearität* von Vektorräumen.

Wir bezeichnen eine Kategorie C als *k-lineare Kategorie*, wenn sie durch die Kategorie \mathbf{vec} aller endlichdimensionalen Vektorräume über dem Körper k bereichert wird. Das bedeutet, daß die Hom-Mengen der Kategorie C endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper k sind. Im folgenden werden wir unter einem Vektorraum immer einen Vektorraum über k verstehen.

So wie wir in der Theorie von Vektorräumen lineare Abbildungen als sinnvolle Klasse von Abbildungen (Morphismen der Kategorie \mathbf{vec}) betrachten, so wollen wir *k-lineare Funktoren*, die auf eine *k-lineare Kategorie* wirken, definieren. Sei C eine *k-lineare Kategorie* und $\mathbf{hom}(a, b)$ ein Vektorraum für alle $a, b \in \mathbf{Ob}(C)$, so definieren wir einen *k-linearen Funktor* T als Funktor, der die Eigenschaft

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g) \quad \lambda, \mu \in k \quad (2.51)$$

für alle $f, g \in \mathbf{hom}(a, b)$ erfüllt.

Betrachten wir das Tensorprodukt $\otimes_{\mathbf{vec}}$ von Vektorräumen, was als bilineare Abbildung mit univ erseller Eigenschaft definiert war, so sehen wir, daß das kategorientheoretische Äquivalent als *k-linearer Bifunktor* definiert werden muß. Ebenso ist auf den Hom-Mengen ein Tensorprodukt von *k-Vektorräumen* definiert, da die Hom-Mengen einer *k-linearen Kategorie* ja als *k-Vektorräume* definiert sind. Wir werden also ein Tensorprodukt *k-linearer Kategorien* einführen, indem wir die Universalitätseigenschaft des Tensorproduktes $\otimes_{\mathbf{vec}}$ von Vektorräumen kategorifizieren.

Seien C, D, E drei *k-lineare Kategorien* und F ein bilinearer Funktor, der auf $C \times D$ mit Bild E wirkt. Wir suchen also einen bilinearen Funktor $\square : C \times D \rightarrow C \square D$, so daß man zu jedem bilinearen Funktor $F : C \times D \rightarrow E$ einen linearen Funktor $\tilde{F} : C \square D \rightarrow E$ findet, so daß $\tilde{F} \circ \square = F$.

Wir definieren \square auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathbf{Ob}(C \square D) &:= \mathbf{Ob}(C \times D) \\ (ii) \quad \mathbf{hom}(C \square D, C' \square D') &= \mathbf{hom}(C, C') \otimes_{\mathbf{vec}} \mathbf{hom}(D, D') \quad , \end{aligned} \quad (2.52)$$

wo \otimes_{vec} das Tensorprodukt von Vektorräumen ist. Somit haben wir ein Tensorprodukt \boxtimes für k -lineare Kategorien definiert.

Achtung: Wir weisen noch einmal darauf hin, daß das Tensorprodukt \otimes_{vec} k -linearer Vektorräume *nicht* mit dem monoidalen Produkt \otimes einer monoidalen Kategorie zu verwechseln ist!

Was passiert aber, wenn die k -lineare Kategorie zusätzlich noch eine additive Kategorie ist?

Wir haben im Kapitel über additive Kategorien bereits erwähnt, daß man in einer additiven Kategorie auf iterativer Art und Weise mehrfache direkte Summen definieren kann. Wir wollen den Begriff des Tensorproduktes k -linearer Kategorien nun auf k -lineare additive Kategorien erweitern. Seien dazu $a_n \in \mathbf{Ob}(A)$, $n \in \mathbf{N}$ Objekte einer additiven Kategorie A . Es ist also eine direkte Summe

$$\bigoplus_j^n a_j \quad (2.53)$$

mit den Projektionen und Injektionen

$$a_k \xrightarrow{i_k} \bigoplus_j a_j \xrightarrow{p_l} a_l \quad (2.54)$$

definiert.

Existiert eine weitere Summe von Objekten der additiven Kategorie A , $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{Ob}(A)$, so existiert folgender Isomorphismus:

$$A\left(\bigoplus_k^m c_k, \bigoplus_j^n a_j\right) \cong \sum_{j,k} A(c_k, a_j) . \quad (2.55)$$

Wir können diesen Isomorphismus auf folgende Art und Weise interpretieren: Jeder Morphismus $f : \bigoplus_j c_j \rightarrow \bigoplus_k a_k$ ist durch eine $m \times n$ - Matrix

$$f_{j,k} := p_k \circ f \circ i_j \quad (2.56)$$

gegeben. Wir erweitern nun die Struktur des Tensorproduktes, das auf k -linearen Kategorien definiert war, auf die Struktur additiver k -linearer Kategorien

Def 2.5.1. *Das Tensorprodukt \boxtimes zweier k -linearer additiver Kategorien C, D ist folgendermaßen definiert: Sei $F : C \times D \rightarrow E$ ein bilinearer Funktor, wo E eine additive k -lineare Kategorie ist, so existiert ein bilinearer Funktor $\boxtimes : C \times D \rightarrow C \boxtimes D$ und ein linearer Funktor $\tilde{F} : C \boxtimes D \rightarrow E$, so daß*

$$\tilde{F} \circ \boxtimes = F . \quad (2.57)$$

Das Tensorprodukt $C \boxtimes D$ ist wie folgt definiert:

- (i) $\mathbf{Ob}(C \boxtimes D) := \{(A_1, \dots, A_n) | n \in \mathbf{N} \text{ und } A_i \in C \boxtimes D\}$
- (ii) $\mathbf{Mor}((A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n)) := \{(F_{j,k})_{j \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}} | F_{j,k} : A_k \rightarrow B_j\} .$

Wir wollen nun noch einmal kurz diskutieren, welche Bedeutung die bisher definierten Strukturen wie monoidale Kategorien, additive Kategorien und Tensorprodukt für unser Vorhaben, der Definition einer Hopfkategorie, besitzen.

Wir haben in Kapitel 2.3 den Begriff der monoidalen Kategorie eingeführt, wodurch wir eine "Multiplikation" von Objekten einer Kategorie ermöglicht haben. Für die Kategorifizierung einer Hopfalgebra reicht das monoidale Produkt aber noch nicht aus: Eine Hopfalgebra beinhaltet die Struktur einer Algebra, der ein Vektorraum zugrundeliegt. Ein Monoid besitzt zwar eine Multiplikation, berücksichtigt aber keinerlei lineare Struktur. Auf der Stufe der monoidalen Kategorien bedeutet dies, daß wir bei dem monoidalen Produkt keine k -lineare Struktur berücksichtigt haben. Würden wir jedoch bei einer monoidalen Kategorie die zugrundeliegende Kategorie durch eine Kategorifizierung eines Vektorraumes, einem sogenannten 2-Vektorraum, austauschen und das monoidale Produkt als binären Funktor durch einen k -linearen Funktor über dem Tensorprodukt \boxtimes

ersetzen, so hätten wir die Struktur einer 2-Algebra definiert.

Wollen wir einen 2-Vektorraum, also eine Kategorifizierung eines Vektorraumes, definieren, so müssen wir folgende Strukturen berücksichtigen:

- k -Linearität
- die Definition einer Basis .

Wir definieren also

Def 2.5.2. Ein **2-Vektorraum** ist eine k -lineare additive Kategorie (C, \oplus) , die eine Untermenge $B \subset C$ mit den folgenden Eigenschaften enthält

- (i) jedes Objekt $b \in \mathbf{Ob}(B)$ ist einfach, was bedeutet, daß diese Objekte nicht Isomorph einer direkten Summe anderer Objekte sind
- (ii) für jedes Objekt $b \in \mathbf{Ob}(B)$ gilt $\dim_k(\text{hom}(b, b)) = 1$, wobei \dim_k die übliche Dimension von Vektorräumen ist
- (iii) zu jedem Objekt $c \in \mathbf{Ob}(C)$ existiert eine Untermenge $B' \subset B$, so daß $c \cong \bigoplus_{b_i \in B'} b_i^n$.

Wie bereits erwähnt, läßt sich mit Hilfe der 2-Vektorräume die Definition einer monoidalen Kategorie zu einer Definition einer 2-Algebra erweitern.

Bevor wir jedoch eine 2-Hopfalgebra definieren können, müssen wir uns über eine wichtige Eigenschaft des Tensorproduktes im klaren werden:

$$\mathbf{vec} \boxtimes C \cong C \quad (2.58)$$

für jede k -lineare Kategorie C , wobei \cong im Zusammenhang von Kategorien bedeutet, daß es einen natürlichen Isomorphismus zwischen diesen Kategorien gibt. \mathbf{vec} bezeichnet die Kategorie endlich-dimensionaler Vektorräume.

Wir wollen nun versuchen, diese Isomorphie zu motivieren. Einen Beweis dieser Behauptung findet man in [22] und [23].

Zuerst wollen wir uns davon überzeugen, daß ein natürlicher k -linearer additiver Isomorphismus

$$(\mathbf{vec})' \boxtimes C \longrightarrow C \quad (2.59)$$

existiert, wobei $(\mathbf{vec})'$ eine Unterkategorie von \mathbf{vec} ist, der die Vektorräume $k^n := \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} k$ enthält. Suchen wir zunächst einen natürlichen Isomorphismus $k \boxtimes C \longrightarrow C$.

Das Tensorprodukt \boxtimes hatten wir ja als k -linearen Funktor definiert. Betrachten wir die Morphismen der Kategorie C , hom_C . Es soll also gelten: $\text{hom}_k \boxtimes \text{hom}_C \cong \text{hom}_C$.

Da allerdings $\text{hom}_k \cong k$, hom_C ein Vektorraum ist und auf den Morphismen das Tensorprodukt $\otimes_{\mathbf{vec}}$ von Vektorräumen definiert ist, also $\text{hom}_k \boxtimes \text{hom}_C := \text{hom}_k \otimes_{\mathbf{vec}} \text{hom}_C$, ist die Aussage $\text{hom}_k \boxtimes \text{hom}_C \cong \text{hom}_C$ trivial.

Auf der anderen Seite existiert eine natürliche Transformation $k^n \boxtimes C \longrightarrow C^n$, da

$$\left(\bigoplus_n k \right) \boxtimes C \cong \bigoplus_n (k \boxtimes C) \quad (2.60)$$

Bis jetzt haben wir die Eigenschaft $(\mathbf{vec})' \boxtimes C$ noch nicht für allgemeine Morphismen gezeigt. Um diese Eigenschaften für die Morphismen zu zeigen, verwenden wir die Matrixdarstellung von Morphismen additiver Kategorien.

Sei f ein Morphismus der Kategorie \mathbf{vec} , der k^n auf k^m abbildet. Diesen Morphismus f können wir als $m \times n$ -Matrix angeben: $f = \sum_{i,j} f_{i,j} e_{i,j}$.

Auf der anderen Seite besitzt jeder Morphismus $\tilde{g} : c^n \longrightarrow c^m$ eine Matrixdarstellung $\tilde{g} = \sum_{i,j} \tilde{g}_{i,j} \tilde{e}_{i,j}$.

Man kann sich vorstellen, daß es einen natürlichen Isomorphismus gibt, der $f \boxtimes \text{id}_c$ auf einen Morphismus $\tilde{f} = f_{i,j} \tilde{e}_{i,j}$ abbildet, da

$$f \boxtimes \text{id}_c : k^n \boxtimes c \longrightarrow k^m \boxtimes c \quad (2.61)$$

einer Abbildung $\tilde{f} : c^n \rightarrow c^m$ entspricht.

Somit haben wir ein Gefühl für die Existenz eines natürlichen Isomorphismus $(\mathbf{vec})' \boxtimes C \rightarrow C$ bekommen.

Um die Aussage $(\mathbf{vec})' \boxtimes C \cong C$ auf die Kategorie \mathbf{vec} zu erweitern erinnern wir uns an die Tatsache, daß jeder n -dimensionale k -Vektorraum V isomorph k^n ist. Es existieren demnach lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \varrho : V &\longrightarrow k^n \\ \zeta : k^n &\longrightarrow V \end{aligned} \quad (2.62)$$

für jeden n -dimensionalen Vektorraum V , wobei $\zeta \circ \varrho = \text{id}_V$ gilt.

Wir betrachten nun die tensorierten Morphismen $\varrho \boxtimes \text{id}_C : k^n \boxtimes C \rightarrow V \boxtimes C$ und $\zeta \boxtimes \text{id}_C : V \boxtimes C \rightarrow k^n \boxtimes C$, für die gilt:

$$\begin{aligned} \zeta \circ \varrho \boxtimes \text{id}_C &= \zeta \boxtimes \text{id}_C \circ \varrho \boxtimes \text{id}_C \\ \varrho \circ \zeta \boxtimes \text{id}_C &= \text{id}_{V \boxtimes C} . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die Isomorphismen ζ, ϱ liefern nun die Bedingung für die Tatsache, daß es einen natürlichen additiven k -linearen Morphismus

$$\widehat{\otimes} : \mathbf{vec} \boxtimes C \longrightarrow C \quad (2.64)$$

gibt, wobei wir die Notation $\widehat{\otimes}$ verwendet haben, wie sie in der Literatur [15] auftritt.

Da $\widehat{\otimes}$ ein natürlicher Isomorphismus ist, existiert seine Inverse

$$\widehat{\otimes}^{-1} : C \longrightarrow \mathbf{vec} \boxtimes C , \quad (2.65)$$

die uns im weiteren Verlauf der Arbeit wieder begegnen wird.

Somit gilt $\mathbf{vec} \boxtimes C \cong C$. Für einen detaillierten Beweis verweisen wir auf die Arbeit [23].

Die natürlichen Isomorphismen $\widehat{\otimes}$ beziehungsweise $\widehat{\otimes}^{-1}$ sind wichtig für die Definition von 2-Algebren, 2-Koalgebren und damit verbunden 2-Hopfalgebren. Sie treten zum Beispiel bei der Beschreibung des Koeinsobjektes einer 2-Koalgebra auf.

Eine 2-Algebra (C, \otimes, I, a, l, r) ist eine Monoidale Kategorie (C, \otimes, I, a, l, r) , wobei C ein 2-Vektorraum, \otimes ein additiver k -linearer Funktor und a, l, r additive k -lineare natürliche Isomorphismen sind.

Alternativ zum Einsobjekt I können wir auch die Existenz eines k -linearen additiven Funktors

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{vec} &\longrightarrow C \\ k &\longmapsto I \end{aligned} \quad (2.66)$$

fordern. Diese Art der Definition einer 2-Algebra $(C, \otimes, \Lambda, a, l, r)$ mit "Einsfunctor" Λ ermöglicht uns die Dualisierung einer 2-Algebra, wodurch wir eine 2-Koalgebra definieren können.

In dem nächsten Kapitel wollen wir nun 2-Koalgebren, 2-Bialgebren und 2-Hopfalgebren definieren.

2.6 Hopfkategorien

In diesem Kapitel soll die Kategorifizierung von Hopfalgebren durchgeführt werden. Die Kategorifizierung wird für uns von Interesse sein, da die dadurch resultierende schwache Struktur, also die "gezielte Verletzung" der Assoziativität und Koassoziativität, von Bedeutung für die Beschreibung von Renormierung im Sinne der Kategorientheorie ist.

Wir starten mit der Kategorifizierung von Koalgebren. Wie üblich [21] erhält man die *Kokategorie* oder auch *duale Kategorie*, indem man die Pfeile (sprich: Morphismen) der definierenden Diagramme einer Kategorie "umdreht", sowohl bei der Definition der Struktur als auch bei den dazugehörigen Kohärenzbedingungen.

Die Definition einer komonoidalen Kategorie bezieht sich dabei auf die Definition einer monoidalen Kategorie 2.3.1, wobei die zugrundeliegende Kategorie C k -linear und additiv, also eine 2-Algebra, ist.

Def 2.6.1. Eine komonoidale Kategorie $(C, \nabla, \Upsilon, \alpha, \lambda, \varrho)$ ist eine k -lineare additive Kategorie C zusammen mit zwei k -linearen additiven Funktoren

$$\begin{aligned} \nabla : C &\longrightarrow C \boxtimes C \\ \Upsilon : C &\longrightarrow \mathbf{vec} \end{aligned} \quad (2.67)$$

und drei natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned} \alpha : (id \boxtimes \nabla) \circ \nabla &\longrightarrow (\nabla \boxtimes id) \circ \nabla \\ \lambda : (\Upsilon \boxtimes id) \circ \nabla &\longrightarrow \widehat{\otimes}^{-1} \\ \varrho : (id \boxtimes \Upsilon) \circ \nabla &\longrightarrow \widehat{\otimes}^{-1} , \end{aligned} \quad (2.68)$$

so daß die folgenden Diagramme kommutieren:
zuerst die **Koassoziativität**

$$\begin{array}{ccc} (id \boxtimes id \boxtimes \nabla) \circ (id \boxtimes \nabla) \circ \nabla & \xrightarrow{(id \boxtimes id \boxtimes \nabla) \circ \alpha} & (\nabla \boxtimes \nabla) \circ \nabla \\ \downarrow (id \boxtimes \alpha) \circ \nabla & & \downarrow (\nabla \boxtimes id \boxtimes id) \circ \alpha \\ (id \boxtimes \nabla \boxtimes id) \circ (id \boxtimes \nabla) \circ \nabla & & (\nabla \boxtimes id \boxtimes id) \circ (\nabla \boxtimes id) \circ \nabla \\ \downarrow (id \boxtimes \nabla \boxtimes id) \circ \alpha & & \downarrow (\alpha \boxtimes id) \circ \nabla \\ (id \boxtimes \nabla \boxtimes id) \circ (\nabla \boxtimes id) \circ \nabla & \xrightarrow{(\alpha \boxtimes id) \circ \nabla} & (\nabla \boxtimes id \boxtimes id) \circ (\nabla \boxtimes id) \circ \nabla \end{array} \quad (2.69)$$

und dann die **Koeinsbedingung**:

$$\begin{array}{ccc} (id \boxtimes (\Upsilon \boxtimes id)) \circ (id \boxtimes \nabla) \circ \nabla & \xrightarrow{(id \boxtimes \Upsilon \boxtimes id) \circ \alpha} & ((id \boxtimes \Upsilon) \boxtimes id) \circ (\nabla \boxtimes id) \circ \nabla \\ & \searrow (id \boxtimes \lambda) \circ \nabla & \swarrow (\varrho \boxtimes id) \circ \nabla \\ & \nabla & \end{array} \quad (2.70)$$

Für die Diagramme wurde folgende Notation eingeführt: Nehmen wir zum Beispiel das Diagramm (2.69) und betrachten den Pfeil

$$(id \boxtimes \alpha) \circ \nabla : (id \boxtimes id \boxtimes \nabla) \circ (id \boxtimes \nabla) \circ \nabla \longrightarrow (id \boxtimes \nabla \boxtimes id) \circ (id \boxtimes \nabla) \circ \nabla .$$

Die erste Abbildung ∇ des natürlichen Isomorphismus bedeutet dabei, das α diese Abbildung unberührt läßt. α wirkt also nur auf den zweiten Teil:

$$\begin{aligned} (id \boxtimes \alpha) : (id \boxtimes id \boxtimes \nabla) \circ (id \boxtimes \nabla) &\longrightarrow (id \boxtimes \nabla \boxtimes id) \circ (id \boxtimes \nabla) \\ \Rightarrow (id \boxtimes \alpha) : id \boxtimes [(id \boxtimes \nabla) \circ \nabla] &\longrightarrow id \boxtimes [(\nabla \boxtimes id) \circ \nabla] . \end{aligned}$$

Die gleiche Syntax wird im zweiten Diagramm verwendet. Hier bleibt zum Beispiel der Teil $(id \boxtimes \Upsilon \boxtimes id)$ von α unberührt. Auch in nachfolgenden Definitionen werden wir diese Syntax für natürliche Transformationen verwenden.

Wie in der Theorie der Koalgebren führen wir die *Sweedlersche Notation* ein:

$$\nabla(C) = \bigoplus_C C_{(1)} \boxtimes C_{(2)} , \quad (2.71)$$

wobei die direkte Summe im weiteren Verlauf der Arbeit nicht mehr explizit angegeben wird, sofern keine Verwechslungen vorliegen können.

Nachdem wir jetzt monoidale und komonoidale Kategorien definiert haben, ist die Frage nach der Existenz bimonoidaler Strukturen naheliegend. Wir müssen bei der Definition bimonoidaler Kategorien nicht nur die Verträglichkeit von komonoidalem und monoidalem Produkt, sondern auch die Verträglichkeit der natürlichen Isomorphismen beider Kategorien fordern. Um dies zu gewährleisten, sind zwölf Kohärenzbedingungen notwendig. Bei der Definition folgen wir dem Weg von [15].

Def 2.6.2. Sei C eine k -lineare additive Kategorie, die sowohl eine monoidale $(C, \otimes, \Lambda, a, l, r)$ als auch eine komonoidale $(C, \nabla, \Upsilon, \alpha, \lambda, \varrho)$ Struktur besitzt. Weiterhin existieren noch folgende vier natürliche Isomorphismen:

(i) $\Xi : (\otimes \boxtimes \otimes) \circ (id \boxtimes \tau \boxtimes id) \circ (\nabla \boxtimes \nabla) \longrightarrow \nabla \circ \otimes$,
 was bedeutet, daß ∇ ein Quasi-Morphismus monoidaler Kategorien ist, oder anders ausgedrückt:
 $(X_{(1)} \otimes Y_{(1)}) \boxtimes (X_{(2)} \otimes Y_{(2)}) \longrightarrow (X \otimes Y)_{(1)} \boxtimes (X \otimes Y)_{(2)}$

(ii) $\Xi_0 : \Lambda \boxtimes \Lambda \longrightarrow \nabla \circ \Lambda$
 oder anders ausgedrückt
 $I \boxtimes I \longrightarrow I_{(1)} \boxtimes I_{(2)}$

(iii) $\Theta : \otimes_{\mathbf{vec}} \circ (\Upsilon \boxtimes \Upsilon) \longrightarrow \Upsilon \circ \otimes$
 also, daß Υ ein quasi-monoidaler Morphismus ist, anders gesagt:
 $\Upsilon(X) \otimes \Upsilon(Y) \longrightarrow \Upsilon(X \otimes Y)$

(iv) $\Theta_0 : id_{\mathbf{vec}} \longrightarrow \Upsilon \Lambda$

was bedeutet, daß $\Upsilon \circ \Lambda$ ein Endofunktor von \mathbf{vec} ist, so daß die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 X_{(1)} \otimes (Y_{(1)} \otimes Z_{(1)}) \boxtimes X_{(2)} \otimes (Y_{(2)} \otimes Z_{(2)}) & \xrightarrow{a \boxtimes a} & (X_{(1)} \otimes Y_{(1)}) \otimes Z_{(1)} \boxtimes (X_{(2)} \otimes Y_{(2)}) \otimes Z_{(2)} \\
 \downarrow \nabla(X) \otimes \Xi & & \Xi \otimes \nabla(Z) \downarrow \\
 X_{(1)} \otimes (Y \otimes Z)_{(1)} \boxtimes X_{(2)} \otimes (Y \otimes Z)_{(2)} & & (X \otimes Y)_{(1)} \otimes Z_{(1)} \boxtimes (X \otimes Y)_{(2)} \otimes Z_{(2)} \\
 \downarrow \Xi & & \downarrow \Xi \\
 (X \otimes (Y \otimes Z))_{(1)} \boxtimes (X \otimes (Y \otimes Z))_{(2)} & \xrightarrow{\nabla(a)} & ((X \otimes Y) \otimes Z)_{(1)} \boxtimes ((X \otimes Y) \otimes Z)_{(2)}
 \end{array} \quad (2.72)$$

$$\begin{array}{ccc}
 I \otimes X_{(1)} \boxtimes I \otimes X_{(2)} & \xrightarrow{\Xi_0 \otimes \nabla(X)} & I_{(1)} \otimes X_{(1)} \boxtimes I_{(2)} \otimes X_{(2)} \xrightarrow{\Xi} & (I \otimes X)_{(1)} \boxtimes (I \otimes X)_{(2)} \\
 \searrow I \boxtimes l & & \swarrow \nabla(I) & \\
 & & X_{(1)} \boxtimes X_{(2)} &
 \end{array} \quad (2.73)$$

$$\begin{array}{ccc}
 X_{(1)} \otimes I \boxtimes X_{(2)} \otimes I & \xrightarrow{\nabla(X) \otimes \Xi_0} & X_{(1)} \otimes I_{(1)} \boxtimes X_{(2)} \otimes I_{(2)} \xrightarrow{\Xi} & (X \otimes I)_{(1)} \boxtimes (X \otimes I)_{(2)} \\
 \searrow r \boxtimes r & & \swarrow \nabla(r) & \\
 & & X_{(1)} \boxtimes X_{(2)} &
 \end{array} \quad (2.74)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Upsilon(X) \otimes (\Upsilon(Y) \otimes \Upsilon(Z)) & \xrightarrow{id \otimes \Theta} & \Upsilon(X) \otimes \Upsilon(Y \otimes Z) \xrightarrow{\Theta} & \Upsilon(X \otimes (Y \otimes Z)) \\
 \downarrow a_{\mathbf{vec}} & & \downarrow \Upsilon(a) & \\
 (\Upsilon(X) \otimes \Upsilon(Y)) \otimes \Upsilon(Z) & \xrightarrow{\Theta \otimes id} & \Upsilon(X \otimes Y) \otimes \Upsilon(Z) \xrightarrow{\Theta} & \Upsilon((X \otimes Y) \otimes Z)
 \end{array} \quad (2.75)$$

$$\begin{array}{ccc}
 k \otimes_{\mathbf{vec}} \Upsilon(X) & \xrightarrow{\Theta_0 \otimes id} & \Upsilon(I) \otimes_{\mathbf{vec}} \Upsilon(X) \xrightarrow{\Theta} & \Upsilon(I \otimes X) \\
 \searrow l_{\mathbf{vec}} & & \swarrow \Upsilon(l) & \\
 & & \Upsilon(X) &
 \end{array} \quad (2.76)$$

$$\begin{array}{ccc}
\Upsilon(X) \otimes_{\text{vec}} k & \xrightarrow{id \otimes \Theta_0} & \Upsilon(X) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(I) \xrightarrow{\Theta} \Upsilon(X \otimes I) \\
& \searrow r_{\text{vec}} & \swarrow \Upsilon(r) \\
& & \Upsilon(X)
\end{array} \quad (2.77)$$

$$\begin{array}{ccc}
X_{(1)} \otimes Y_{(1)} \boxtimes X_{(2)} \otimes Y_{(2)} \boxtimes X_{(3)} \otimes Y_{(3)} & \xrightarrow{\alpha \otimes_C \boxtimes C \boxtimes C \otimes \alpha} & X_{(1)} \otimes Y_{(1)} \boxtimes X_{(2)} \otimes Y_{(2)} \boxtimes X_{(3)} \otimes Y_{(3)} \\
\downarrow X_{(1)} \otimes Y_{(1)} \boxtimes \Xi & & \downarrow \Xi \boxtimes X_{(3)} \otimes Y_{(3)} \\
X_{(1)} \otimes Y_{(1)} \boxtimes (X_{(2)} \otimes Y_{(2)})_{(1)} \boxtimes (X_{(2)} \otimes Y_{(2)})_{(2)} & & (X_{(1)} \otimes Y_{(1)})_{(1)} \boxtimes (X_{(1)} \otimes Y_{(1)})_{(2)} \boxtimes X_{(2)} \otimes Y_{(2)} \\
\downarrow (id \boxtimes \nabla) \circ \Xi & & \downarrow (\nabla \boxtimes id) \circ \Xi \\
(X \otimes Y)_{(1)} \boxtimes ((X \otimes Y)_{(2)}) \boxtimes (X \otimes Y)_{(3)} & \xrightarrow{\alpha} & ((X \otimes Y)_{(1)}) \boxtimes (X \otimes Y)_{(2)} \boxtimes (X \otimes Y)_{(3)}
\end{array} \quad (2.78)$$

$$\begin{array}{ccc}
\Upsilon(X_{(1)}) \otimes \Upsilon(Y_{(1)}) \boxtimes X_{(2)} \otimes Y_{(2)} & \xrightarrow{\Theta \boxtimes id} & \Upsilon(X_{(1)} \otimes Y_{(1)}) \boxtimes X_{(2)} \otimes Y_{(2)} \xrightarrow{(\Upsilon id) \circ \Xi} \Upsilon(X \otimes Y)_{(1)} \boxtimes (X \otimes Y)_{(2)} \\
& \searrow \lambda \otimes \lambda & \swarrow \lambda \\
& & X \otimes Y
\end{array} \quad (2.79)$$

$$\begin{array}{ccc}
X_{(1)} \otimes Y_{(1)} \boxtimes \Upsilon(X_{(2)}) \otimes \Upsilon(Y_{(2)}) & \xrightarrow{id \otimes \Theta} & X_{(1)} \otimes Y_{(1)} \boxtimes \Upsilon(X_{(2)} \otimes Y_{(2)}) \xrightarrow{(id \boxtimes \Upsilon) \circ \Xi} (X \otimes Y)_{(1)} \boxtimes \Upsilon((X \otimes Y)_{(1)}) \\
& \searrow \varrho \otimes \varrho & \swarrow \varrho \\
& & X \otimes Y
\end{array} \quad (2.80)$$

$$\begin{array}{ccc}
I \boxtimes (I \boxtimes I) & \xrightarrow{id \boxtimes \Xi_0} & I \boxtimes (I_{(1)} \boxtimes I_{(2)}) \xrightarrow{(id \boxtimes \nabla) \circ \Xi_0} I_{(1)} \boxtimes (I_{(2)} \boxtimes I_{(3)}) \\
\downarrow \Lambda \boxtimes \Lambda \boxtimes \Lambda \circ \alpha_{\text{vec}} & & \downarrow \alpha \\
(I \boxtimes I) \boxtimes I & \xrightarrow{\Xi_0 \boxtimes id} & (I_{(1)} \boxtimes I_{(2)}) \boxtimes I \xrightarrow{\nabla \boxtimes id \circ \Xi_0} (I_{(1)} \boxtimes I_{(2)}) \boxtimes I_{(3)}
\end{array} \quad (2.81)$$

$$\begin{array}{ccc}
k \boxtimes I & \xrightarrow{\Theta_0 \boxtimes id} & \Upsilon(I) \boxtimes I \xrightarrow{(\Upsilon id) \circ \Xi_0} \Upsilon(I_{(1)}) \boxtimes I_{(2)} \\
& \searrow \cong & \swarrow \lambda \\
& & I
\end{array} \quad (2.82)$$

$$\begin{array}{ccc}
I \boxtimes k & \xrightarrow{id \boxtimes \Theta_0} & I \boxtimes \Upsilon(I) \xrightarrow{(id \boxtimes \Upsilon) \circ \Xi_0} I_{(1)} \boxtimes \Upsilon(I_{(2)}) \\
& \searrow \cong & \swarrow \varrho \\
& & I
\end{array} \quad (2.83)$$

Dann nennt man $(C, \otimes, \nabla, \Lambda, \Upsilon, a, \alpha, l, r, \lambda, \varrho, \Theta, \Theta_0, \Xi, \Xi_0)$ eine **bimonoidale Kategorie** oder eine **2-Bialgebra**.

Zugegebenermaßen ist die Definition bimonoidaler Kategorien durch die Anzahl der Diagramme etwas technisch. Man wundert sich jedoch nicht wenn man überlegt, daß alle definierten Morphismen und natürliche Transformationen die Struktur monoidaler Kategorien beziehungsweise komonoidaler Kategorien respektieren müssen. Im Fall von Bialgebren ist dies noch überschaubar: Es gibt Δ, ε , die Algebrenhomomorphismen sein müssen, und m, η , die Koalgebrenhomomorphismen sein müssen [24], wobei die letzte Aussage aufgrund der Struktur von Hopfalgebren redundant ist.

Im Fall von Kategorifizierung ist dies anders: Es existieren zusätzlich noch natürliche Isomorphismen $a, \alpha, l, r, \lambda, \varrho, \Theta, \Theta_0, \Xi, \Xi_0$, die ebenfalls die monoidale beziehungsweise komonoidale Struktur respektieren müssen. Dabei zeigen die Diagramme (1) – (3), daß (∇, Ξ, Ξ_0) *monoidale Funktoren* sind, (4) – (6) stellen diese Eigenschaft für $(\Upsilon, \Theta, \Theta_0)$ sicher. Die Diagramme (7) – (9) zeigen die Eigenschaft von (\otimes, Ξ, Θ) , komonoidale Funktoren zu sein, (10) – (12) zeigt diese Eigenschaft für $(\Lambda, \Xi_0, \Theta_0)$.

Welchen Vorteil bringt diese Extra-Struktur? Im Gegensatz zur Formulierung der Bialgebren hat man hier die Möglichkeit, Assoziativität und Koassoziativität gezielt zu verletzen. Im Falle der Quasi-Hopfalgebren hat man diese Möglichkeit der Verletzung der Koassoziativität durch Einführen eines Drinfeldassoziators gelöst, was allerdings einen Vergleich mit monoidalen Kategorien und deren Assoziator nötig macht [24]. Zusätzliche Verletzung der Assoziativität würde jedoch einen Vergleich mit bimonoidalen Kategorien voraussetzen.

Nachdem wir schon die Struktur der 2-Bialgebren definiert haben, ist es wiederum naheliegend, den nächsten Schritt, also die Definition von 2-Hopfalgebren (oder auch Hopfkategorien), zu vollenden. Die Definition wird gemäß der Methode der Kategorifizierung vorgenommen. Natürlich muß berücksichtigt werden, daß unsere Eins bezüglich des kategorifizierten “*”-Produkts nicht notwendigerweise eine strikte Beziehung oder Gleichung liefert, was dann wiederum durch natürliche Isomorphismen repariert werden muß.

Def 2.6.3. Sei C eine 2-Bialgebra und $S : C \longrightarrow C$ ein Funktor. Seien ferner

$$\begin{aligned}\sigma_1 &: \otimes \circ (S \boxtimes id) \circ \nabla \longrightarrow \Lambda \circ \Upsilon \\ \sigma_2 &: \Lambda \circ \Upsilon \longrightarrow \otimes \circ (id \boxtimes S) \circ \nabla\end{aligned}\tag{2.84}$$

natürliche Transformationen.

$(C, S, \sigma_1, \sigma_2)$ ist eine **Hopfkatgorie** oder **2-Hopfalgebra**, falls folgende Relationen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}[C \xrightarrow{\sigma_2 \otimes id} C_{(1)} \otimes S(C_{(2)}) \otimes C_{(3)} \xrightarrow{id \otimes \sigma_2} C] &= id_C \\ [S(C) \xrightarrow{id \otimes \sigma_1} S(C_{(1)}) \otimes C_{(2)} \otimes C_{(3)} \xrightarrow{\sigma_1 \otimes id} S(C)] &= id_{S(C)}\end{aligned}\tag{2.85}$$

Somit sind wir am Ziel unserer mathematischen Einleitung, der Definition einer Hopfkategorie beziehungsweise 2-Hopfalgebra, angelangt.

Wir haben gesehen, daß die Kategorifizierung einer Hopfalgebra viele zusätzliche Strukturen liefert. Die Eigenschaften aller Strukturabbildungen besitzen die Möglichkeit zu gezielten Verletzungen, also Verletzungen bis auf einen Morphismus, so daß man unter Berücksichtigung der Erfüllung der notwendigen Kohärenzen viele Möglichkeiten der “leichten” Veränderung des Begriffes einer Hopfkategorie besitzt. Man könnte sagen, daß man gegenüber der rein algebraischen Formulierung noch die Möglichkeit einer “Feinjustage” besitzt. Diese “Feinjustage” werden wir uns nun im weiteren Verlauf der Arbeit zu Nutze machen, und eine gezielte Verletzung der Assoziativität einführen.

Selbstverständlich gibt es noch viele Eigenschaften von Hopfkategorien, 2-Bialgebren und den anderen Konstruktionen, die wir hier nicht aufzeigen werden. Die für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtigen Grundlagen sind jedoch bereitgestellt worden. Für den Leser, der an weiteren Strukturen interessiert ist, sei die Dissertation von Martin Neuchl [15] empfohlen.

2.7 Kurze Zusammenfassung

An dieser Stelle soll noch einmal kurz der Inhalt des bisher Gesagten zusammengefasst werden. Grundlage war die Kategorifizierung algebraischer Strukturen bis hin zu Hopfalgebren. Die Kategorifizierung erwies sich als geeignetes Mittel, gegebene algebraische Strukturen zu erweitern, indem man Elemente durch Objekte, Gleichungen durch Isomorphismen und Funktionen durch Morphismen beziehungsweise Funktoren ersetzte.

Ausgehend von der Definition der Kategorie, die wir als eine Kategorifizierung des Begriffes der *Menge* interpretierten, erweiterten wir diese Vorgehensweise auf kompliziertere Strukturen. Bei der Definition einer Kategorie wurde deutlich, daß die Zusätzliche Struktur, also die Morphismen,

einen Vergleich von Objekten *im Sinne einer Kategorie* ermöglichen. So erlauben zum Beispiel die Isomorphismen der Kategorie **vec**, der Kategorie endlichdimensionaler Vektorräume, folgenden Vergleich: Zwei Vektorräume gelten als gleichwertig im Sinne der Vektorraumtheorie (hier hat sich der Begriff Isomorphismus schon längst in den üblichen Jargon eingebürgert), falls ihre Dimension über dem Körper k gleich ist.

Durch Kategorifizierung von Kategorien erhielten wir den Begriff der sogenannten 2-Kategorien, wobei die Zahl 2 hier andeutet, daß eine Kategorifizierung im Sinne mehrdimensionaler Algebra vorliegt. Ein Synonym, das wir für alle kategorifizierten algebraischen Strukturen benutzen.

Wir finden 2-Kategorien zum Beispiel in der algebraischen Topologie, genauer gesagt in der Homologie-Theorie wieder, die gleichzeitig auch der Geburtsort der Theorie von n -Kategorien ist.

Durch Kategorifizierung von Monoiden erhielten wir monoidale Kategorien, auch 2-Monoid genannt. Somit kann eine Multiplikation von Objekten einer Kategorie definiert werden. Dabei wird die bei Monoiden erfüllte Gleichung $a(bc) = (ab)c$ zu einer natürlichen Isomorphie $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$, die durch eine natürliche Transformation a , dem Assoziator, gegeben ist.

Um das Ziel der Kategorifizierung einer Hopfalgebra zu erreichen, muß zuerst die Struktur des 2-Monoids auf die einer 2-Algebra erweitert werden. Da der Unterschied eines Monoids zu einer Algebra in der zugrundeliegenden Struktur, nämlich der der Vektorräume, steckt, führten wir zunächst die Kategorifizierung von Vektorräumen, sogenannte 2-Vektorräume, ein. Damit verbunden erhielten wir Strukturen wie *additivität, k -linearität, direktes Produkt und Tensorprodukt*, jeweils auf der Stufe von Kategorien definiert. Das Einführen dieser Strukturen in monoidale Kategorien führt zu 2-Algebren, deren Dualisierung zu 2-Koalgebren. Die Forderung nach Verträglichkeit der 2-Algebren- und 2-Koalgebren-Strukturen erwies sich als aufwändig, erlaubte uns aber die Kategorifizierung von Bialgebren zu 2-Bialgebren (oder auch bimonoidale Kategorien genannt). Hierbei sind sowohl die Assoziativität als auch die Koassoziativität lediglich bis auf natürlichen Isomorphismus gegeben, was wir im folgenden auch als “quasi-assoziativ” oder “quasi-koassoziativ” bezeichnen werden. Letztendlich erhielten wir durch Einführen einer *quasi-Antipode*, das heißt eines Morphismus, der die Eigenschaft als Inverse der Identitätsabbildung bezüglich des Faltungsproduktes bis auf natürliche Isomorphismen erfüllt, die Kategorifizierung einer Hopfalgebra, die sogenannte Hopfkategorie oder auch 2-Hopfalgebra.

Der Zusammenhang mit der Physik, genauer gesagt der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie, *pQFT*⁴, soll nun im nächsten Kapitel hergestellt werden.

Ausgangspunkt dafür wird die *Hopf algebra of rooted trees*⁵, \mathcal{H}_R , sein. Diese Hopfalgebra liefert den algebraischen Rahmen für die Kombinatorik von Renormierung in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien. Über Verhältnisse von Darstellungen (*Charaktere*) dieser Hopfalgebra \mathcal{H}_R ist es möglich, eine algebraische Formulierung von Renormierungstheorie zu finden.

Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine kategorientheoretische Interpretation der algebraischen Formulierung durch eine *modifizierte Kategorifizierung* geben, deren natürliche Transformationen angeben und die dazugehörigen Kohärenzbedingungen verifizieren.

2.8 Literaturangabe zu diesem Kapitel

Obwohl in dem Text bereits die wichtigsten Literaturangaben gemacht worden sind, soll an dieser Stelle noch einmal ein kurzer Überblick über die Literatur gegeben werden.

Eine gute, vollständige und verständliche Einführung in Kategorientheorie bis hin zur Theorie von 2-Kategorien (nur 2. Auflage!), additive Kategorien und Bereicherungen (*enrichments*) gibt es in [21].

Die Theorie von Hopfalgebren sowie eine kurze aber sehr gut verständliche Einführung in Kategorien und monoidale Kategorien (**Achtung!** Monoidale Kategorien werden hier als Tensor-kategorien bezeichnet!) liefert [24]. Das Buch ist gut geschrieben und eignet sich hervorragend zum Selbststudium.

Zum Thema *Kategorifizierung* gibt es mehrere gut lesbare Veröffentlichungen von John Baez. Her-

⁴Abkürzung für *perturbative Quantum Field-Theories*.

⁵engl. für *Hopfalgebra der Wurzelbäume*.

vorzuheben sind [16], [17], in denen die Theorie von n -Kategorien auf angenehme Art und Weise dargestellt wird. Veröffentlichungen von John Baez findet man unter anderem auf seiner Homepage <http://math.ucr.edu/home/baez/>.

Literatur zum Thema 2-Bialgebren und 2-Hopfalgebren sind sehr spärlich vorhanden und beziehen sich eigentlich alle auf deren "Urpaper" [18]. Eine gute Behandlung findet sich in [15]. Diese Dissertation findet man auf der Homepage <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~neuchl/>. Eine kurze aber intuitive Einführung ist in [19] und [20] gegeben.

Leider erschöpfen sich damit Veröffentlichungen über Hopfkategorien, die für diese Arbeit wichtigen Aspekte und Definitionen sind aber in diesem Kapitel abgehandelt worden.

Kapitel 3

Renormierung und Hopfalgebren

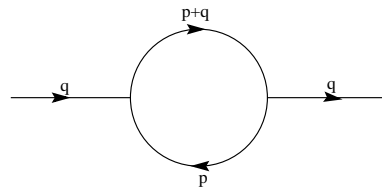
In diesem Kapitel wollen wir den Zusammenhang zwischen Renormierung und Hopfalgebren diskutieren. Dieser Zusammenhang wurde erstmals von Kreimer [1, 2] aufgestellt, der eine Hopfalgebra definierte, die eine algebraische Beschreibung der iterativen Struktur von Renormierung liefert. Bevor wir jedoch diese Hopfalgebra definieren, wollen wir die Zimmermannsche *Forest*-Formel, welche die Kombinatorik von Renormierung beschreibt, vorstellen. Im Anschluß daran wollen wir die Hopfalgebrenstruktur definieren. Wir werden weiterhin zeigen, wie wir mit Hilfe von Darstellungen dieser Hopfalgebra die Renormierung divergenter Integrale algebraisch formulieren können, wobei wir die Bedeutung sogenannter *Renormierungsabbildungen* diskutieren werden. Wir werden sehen, daß Renormierungsabbildungen “Vergleiche” zwischen diesen als Laurentreihe dargestellten divergenten Integralen ermöglichen, und zwar “Vergleiche”, die Laurentreihen gleichen Divergenzverhaltens identifizieren (hier kann man schon erste Äquivalenzen zwischen Renormierungsabbildungen und Morphismen ziehen, denn die Morphismen einer Kategorie waren ja gerade aus dem Grund eingeführt worden, Vergleiche durchführen zu können).

Dies alles wird Grundlage für die kategorientheoretische Untersuchung von Renormierung sein, die im anschließenden Kapitel folgen wird. Beginnen wir mit einem Überblick über die Renormierung divergenter Feynmangraphen, wobei die Details der nun folgenden Diskussion zum Beispiel in [14, 27, 28, 29] zu finden sind.

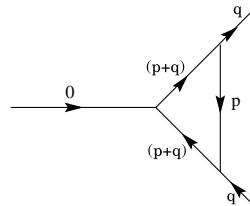
3.1 Die Zimmermannsche Forest Formula

Wie wir in der Einleitung zu dieser Arbeit erwähnt haben, treten bei der Berechnung elementarer Prozesse in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien Divergenzen auf, die wir als Infrarot- und UV-Divergenzen bezeichnet haben. In dem nun folgenden Kapitel wollen wir uns mit dem Auftreten von UV-Divergenzen und deren Behandlung in der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie beschäftigen. Erinnern wir uns an das Auftreten solcher UV-Divergenzen. Die störungstheoretische Quantenfeldtheorie erlaubt, daß bei jeder Wechselwirkung eine beliebige Anzahl von Teilchen in einem unbeobachtbaren Zeitintervall erzeugt und vernichtet werden kann. Bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten muß man deshalb alle Möglichkeiten dieser Teilchenerzeugung und Vernichtung berücksichtigen. Solche in unbeobachtbarer Zeit erzeugten und vernichteten Teilchen können in dem die Reaktion repräsentierenden Feynmangraphen eine geschlossene Schleife (engl. Loop) erzeugen, die von dem Teilchen mit einem Impuls p durchlaufen wird. Hier zwei Beispiele

für jeweils ein erzeugtes und vernichtetes Teilchen mit Impuls p (Φ^3 -Theorie in 6 Dimensionen):

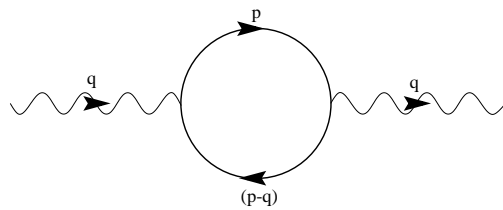


$$(3.1)$$



Um Wahrscheinlichkeitsaussagen über Feynmandiagramme mit solchen Schleifen machen zu können, muß über alle möglichen Werte, die ein Impuls in einer Schleife annehmen kann, summiert werden. Aufgrund der Überabzählbarkeit der Impulswerte führt diese Summation zu einer Integration über den Vierer-Impulsraum.

Betrachten wir uns als Beispiel dazu die Vakuumpolarisation in der Quantenelektrodynamik:



$$(3.2)$$

Die Auswertung dieses Feynmandiagramms ist durch folgendes Integral gegeben:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} - \not{q} - m + i\varepsilon} \right) \quad (3.3)$$

Die Integrationen der analytischen Ausdrücke der Feynmandiagramme weisen allerdings UV-Divergenzen auf. Somit drängt sich eine zentrale Problematik für die störungstheoretische Quantenfeldtheorie auf: Wie behandelt man UV-Divergenzen, um berechenbare Werte zu bekommen?

Die Antwort auf diese Frage ist durch die Renormierung gegeben. Das Renormierungsverfahren ist wohldefiniert und nach Wahl eines Renormierungsschemas eindeutig. Renormierte Feynmandiagramme besitzen keine UV-divergenten Terme mehr in den zu berechnenden physikalisch meßbaren Größen.

Wie gehen wir bei dem Renormierungsverfahren vor?

Erst einmal soll festgestellt werden, ob der zu berechnende Graph überhaupt UV-Divergenzen besitzt.

Wie kann man einem Feynmanintegral ansehen, ob es konvergent oder divergent ist?

Das geeignete Mittel zur Bestimmung des Divergenzgrades einer Integration ist das *Power Counting*¹, bei der man durch Abzählen der Potenzen von Integrationsmaß und dem zu integrierenden Polynom den Divergenzgrad feststellen kann. Betrachten wir zum Beispiel das Polynom

$$f(p) \sim \left(\frac{1}{p^2 + c^2} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (3.4)$$

¹Dieser Begriff wird nicht übersetzt.

wobei c eine reelle Konstante, zum Beispiel die Masse eines Teilchens, ist.
Dem Integral

$$I := \int d^n p f(p) \quad (3.5)$$

können wir eine Zahl $\omega(I) = n - m$ zuordnen, also die Differenz der Zähler- und Nennerpotenzen in der Integrationsvariablen. Da $n \geq 0$, können wir anhand der Zahl $\omega(I)$ folgende Aussagen treffen:

- $\omega(I) < 0$: Das Integral ist *konvergent*
- $\omega(I) \geq 0$: Das Integral ist *divergent*.

Wir können sogar noch mehr Aussagen anhand der Zahl $\omega(I)$ treffen:

- $\omega(I) = 0$: Das Integral ist vom Typ $\int \frac{dx}{x}$. Wir bezeichnen dieses Integral dann als *logarithmisch divergent*.
- $\omega(I) = 1$: Das Integral ist vom Typ $\int dx$. Wir bezeichnen dieses Integral dann als *linear divergent*.
- $\omega(I) = 2$: Das Integral ist vom Typ $\int x dx$. Wir bezeichnen dieses Integral dann als *quadratisch divergent*.

Ist $\omega(I) \geq 0$, so bezeichnen wir den Feynmangraphen als *überalles-divergent* (engl.: *overall divergent*) und bezeichnen die Zahl $\omega(I)$ als *Grad der Überalles-Divergenz*.

Nachdem wir mit Power Counting ein Mittel zur Bestimmung des Divergenzgrades eines Feynmangraphen gegeben haben, wollen wir topologische Eigenschaften von Subgraphen eines Feynmangraphen diskutieren. Der Grund dieser Diskussion liegt in der Bedeutung divergenter Subgraphen für den Renormierungsprozess.

Bemerkung: *Im folgenden betrachten wir nur einteilchen-irreduzible Graphen (engl. one particle irreducible graphs, 1PI's). Ein Graph ist einteilchen-irreduzibel, falls man ihn nicht durch Durchtrennen eines Propagators in zwei disjunkte Feynmangraphen unterteilen kann.*

Betrachten wir also die divergenten Subgraphen $\gamma_i \subset \Gamma$, $\omega(\gamma_i) \geq 0$ eines gegebenen Feynmangraphen Γ . Besitzt ein Feynmangraph Γ keine divergenten Subgraphen, so bezeichnen wir ihn als *primitiven Graphen*. Wir werden zu einem späteren Zeitpunkt sehen, wie sich die Bezeichnung "primitiv" im Zusammenhang mit divergenten Subgraphen mit dem Begriff des primitiven Elements aus der Theorie der Hopfalgebren deckt.

Untersuchen wir nun den Fall eines Graphen Γ mit divergenten Subgraphen $\gamma_i \subset \Gamma$. Wir wollen zunächst einmal eine Menge V von divergenten Subgraphen eines Graphen Γ definieren. Diese Menge werden wir allerdings nur für Graphen mit divergenten Subgraphen spezieller Eigenschaft definieren, nämlich auf Graphen ohne überlappende Subdivergenzen.

Besitzt ein Feynmangraph Γ Subdivergenzen mit der Eigenschaft, daß für alle Paare $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$ subdivergenter Teilgraphen gilt:

$$\gamma_i, \gamma_j \begin{cases} \text{entweder } \gamma_i \subset \gamma_j \\ \text{oder } \gamma_j \subset \gamma_i \\ \text{oder } \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \end{cases}, \quad (3.6)$$

so definieren wir eine Menge

$$V := \{\gamma_i \mid \gamma_i \in \Gamma\}. \quad (3.7)$$

Die Bedingung $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ ist dabei so zu verstehen, daß γ_i und γ_j keine gemeinsamen Vertizes besitzen. In diesem Fall bezeichnen wir γ_i und γ_j als *disjunkt*. Gilt $\gamma_i \subset \gamma_j$ oder $\gamma_j \subset \gamma_i$, so sprechen wir von *verschachtelten* (engl. *nested*) Subdivergenzen². Besitzen γ_1 und γ_2 gemeinsame Vertizes, $\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset$, und sind γ_1 und γ_2 nicht genestet, so bezeichnen wir sie als *überlappend*.

²Synonym für divergente Subgraphen.

Es kann natürlich auch passieren, daß ein überalles-konvergenter Graph, $\omega(\Gamma) < 0$, divergente Subgraphen enthält: $\gamma_i \subset \Gamma, \omega(\gamma_i) \geq 0$.

Diese mengentheoretische Betrachtung divergenter Subgraphen eines Feynmangraphen Γ , also die Menge V , ist wichtig für seine Renormierung, wie wir im folgenden sehen werden.

Bemerkung: Die Tatsache, daß wir uns bei der Definition der Menge V auf Feynmangraphen ohne überlappende Subdivergenzen zurückziehen, ist keine Einschränkung! Den Fall überlappender Subdivergenzen werden wir später (3.20) diskutieren.

Wie renormiert man nun einen divergenten Feynmangraphen?

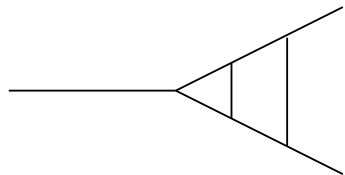
Betrachten wir zuerst einen divergenten primitiven Graphen Γ_p . Wir suchen einen Additionsterm, den sogenannten *Counterterm* oder *Abzugsterm* $Z(\Gamma_p)$, für den gilt

- $\Gamma_p + Z(\Gamma_p)$ ist endlich
- $Z(\Gamma_p)$ ist *lokal*.

Dabei bedeutet *lokal*, daß in dem Counterterm keine Logarithmen äußerer Impulse auftreten dürfen, da eine Fouriertransformation eines solchen Ausdrucks Logarithmen von Differentialoperatoren erzeugen würde, was den Prinzipien einer lokalen Quantenfeldtheorie widerspricht.

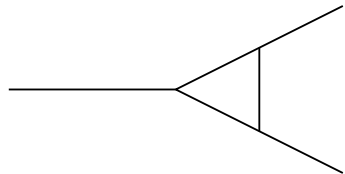
Was passiert in dem Fall eines Feynmangraphen Γ mit Subdivergenzen?

Der Counterterm $Z(\Gamma)$ eliminiert dabei nur Divergenzen des führenden Polterms, also der Überalles-Divergenz. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel eines überalles-divergenten Graphen Γ



$$(3.8)$$

mit divergentem Subgraphen $\gamma \subset \Gamma$



$$(3.9)$$

Der Counterterm $Z(\Gamma)$ eliminiert die führende Divergenz bis auf die Divergenz des Subgraphen, also

$$-\triangleleft + Z[-\triangleleft] \sim -\triangleleft \quad (3.10)$$

Wir definieren uns einen Graphen $\bar{\Gamma}$, bei dem die Subdivergenzen von Γ durch die Counterterme der Subgraphen eliminiert worden sind. In unserem Beispiel:

$$\bar{\Gamma} := -\triangleleft + Z[-\triangleleft] -\triangleleft . \quad (3.11)$$

Das bedeutet, daß $\bar{\Gamma}$ nur noch die führende Divergenz (gemeint ist hierbei die führende Polordnung einer Laurentreihenentwicklung des divergenten Ausdrucks) besitzt, da die Divergenz verursacht durch den Subgraphen $-\triangleleft$ aufgrund der Addition des Counterterms $Z[-\triangleleft]$ eliminiert worden ist. Da die führende Divergenz wie bereits erwähnt durch die Addition seines Counterterms $Z[-\triangleleft]$ beseitigt werden kann, ist der Ausdruck $\bar{\Gamma} + Z(\Gamma)$ endlich.

Wie berechnen wir einen Abzugsterm $Z(\Gamma)$ mit der Eigenschaft, daß $\bar{\Gamma} + Z(\Gamma)$ ein wohldefinierter, divergenzfreier Ausdruck ist?

Dazu benötigen wir folgende Dinge:

- Das Wissen über die Verschachtelung divergenter Subgraphen von Γ
- Eine Renormierungsabbildung R .

Bemerkung: Wir werden hier nur den Fall nichtüberlappender Subdivergenzen betrachten. Dies ist keine Einschränkung, da dieser Formalismus ebenso für Graphen mit überlappenden Subdivergenzen gültig ist. Wir werden den Fall überlappender Subdivergenzen zu einem späteren Zeitpunkt diskutieren (3.20).

Zum Thema Renormierungsabbildung wollen wir an diesem Punkt noch nichts sagen, sondern diesen Ausdruck symbolisch für folgende Tatsache benutzen: Sei Γ_p ein *primitiver Graph*, so gilt:

$$\Gamma_p - R[\Gamma_p] \quad (3.12)$$

ist ein wohldefinierter konvergenter Ausdruck. Für primitive Graphen Γ_p gilt also:

$$Z(\Gamma_p) = -R[\Gamma_p] \quad (3.13)$$

Eine genauere Diskussion von Renormierungsabbildungen soll zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen. Wie renormiert man nun allgemeine Feynmangraphen Γ ?

Haben wir eine Renormierungsabbildung R ausgewählt, die die Voraussetzung (3.12) für primitive Graphen erfüllt, so gibt uns die *Bogoliubov's recursive Formula* an, wie wir den Counterterm für einen beliebigen Graphen Γ mit Subdivergenzen berechnen können:

$$Z(\Gamma) = -R[\Gamma] - R \left[\sum_{\gamma_i \subset V} Z(\gamma_i) \Gamma / \gamma_i \right] \quad (3.14)$$

Bemerkung: Kreimer hat gezeigt [13], daß die rekursive Definition des Counterterms durch Bogoliubov's recursive Formula und die nichtrekursive Zimmermannsche Forest-Formel dieselbe algebraische Beschreibung der Counterterme liefern. Aufgrund dieser Analogie werden wir in Verbindung mit (3.14) nur noch von der Zimmermannschen Forest-Formel für den Counterterm sprechen.

Wir haben also gesehen, wie wir aus einem UV-divergenten Feynmangraphen durch Renormierung einen wohldefinierten Ausdruck machen konnten. Dazu addieren wir zu jedem UV-divergenten Feynmangraphen Γ seinen Counterterm $Z(\Gamma)$. Die Kombinatorik zur Berechnung der Counterterme ist durch die *Zimmermannsche Forest Formula* gegeben. Sie repräsentiert die iterative Struktur von Renormierung in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien.

Von der rechentechnischen Seite haben wir nun skizziert, wie man Counterterme für divergente Feynmangraphen berechnen kann. Wie sieht es mit einer algebraischen Beschreibung der Berechnung solcher Counterterme aus? Gibt es eine algebraische Struktur, die solche iterativen Strukturen als kanonische Strukturabbildungen beinhaltet?

Die Antwort gab Kreimer durch die Definition der *Hopfalgebra der Wurzelbäume* (engl. *Hopf Algebra of Rooted Trees*) [1, 2, 3, 4]. Diese Hopfalgebra wollen wir nun in dem nächsten Kapitel definieren und deren Zusammenhang mit der Berechnung der Counterterme aufzeigen.

3.2 Die Hopfalgebra der Wurzelbäume, \mathcal{H}_R

Um die Kombinatorik zur Berechnung der Counterterme algebraisch zu "implementieren", muß man sich zuerst überlegen, auf welche Weise man die subdivergente Struktur von Feynmangraphen in algebraische Strukturen einbetten kann, um einen algebraischen Ausdruck für die Kombinatorik der Zimmermannschen *Forest-Formel* zu bekommen.

Was bedeutet algebraische Formulierung in diesem Zusammenhang?

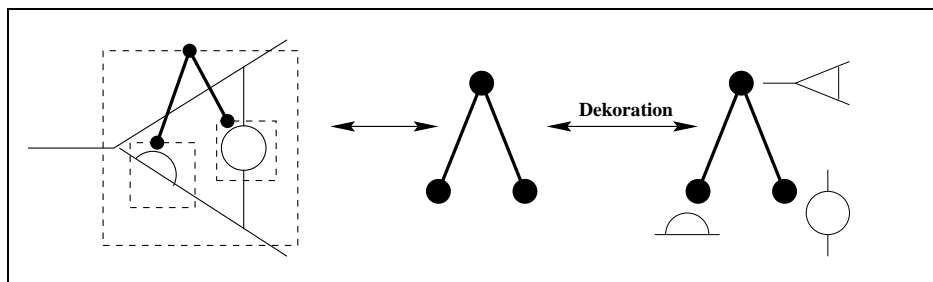
Wir wollen versuchen eine Algebra zu definieren, deren Elemente mit Feynmandiagrammen korrespondieren, so daß die Strukturabbildungen die iterativen Prozesse von Renormierung liefern. Das heißt also, die algebraische Struktur allein bietet die Kombinatorik und Logik von Renormierung in Form von Strukturabbildungen ohne zusätzliche Angabe von Strukturen.

Welche Möglichkeiten der Korrespondenz hat man?

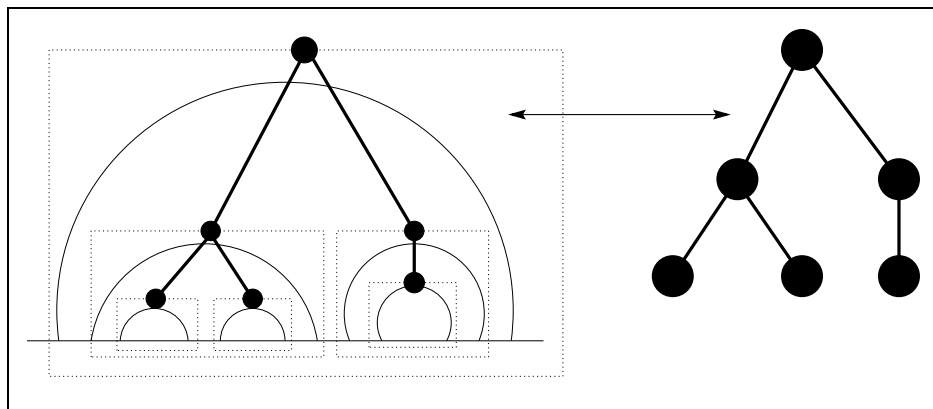
Für die Berechnung der Counterterme ist die Verschachtelung der Subdivergenzen eines Graphen wichtig. Die Basiselemente dieser Algebra müssen also die verschachtelte Struktur, in der die Subdivergenzen in einem Feynmangraphen "eingebettet" sind, in sich "kodiert" haben. Die Frage ist, auf welche Weise man diese Verschachtelungen divergenter Subgraphen "kodiert". Kreimer führt dazu sogenannte *Wurzelbäume* (engl. *rooted trees*) ein. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Hat man einen Feynmangraphen Γ mit Subdivergenzen $\gamma_i \subset \Gamma$, so umrahmt man jeden divergenten Subgraph γ_i mit einer Box. Besitzt γ_i seinerseits genestete Subdivergenzen, so werden diese ebenfalls durch innenliegende Boxen markiert. Nimmt man nun eine Box, die einen divergenten Subgraphen umgibt, und läßt alle darin liegenden Boxen samt Inhalt zu einem Punkt zusammenschrumpfen, so erhält man in der übrigbleibenden Box einen primitiven Graphen, also einen Graphen ohne Subdivergenzen. Weiterhin sollen die Boxen sich nicht überlappen³. Jede Box markiert man mit einem Punkt auf seiner oberen Kante und verbindet die Punkte der verschachtelten Boxen (sogenannte *Vertizes*) mit Kanten (engl. *edges*). Als Resultat erhält man einen Wurzelbaum, der ein Abbild der verschachtelten Struktur der Subdivergenzen des Feynmangraphen Γ ist. Den obersten Vertex, der die äußerste Box markiert, bezeichnen wir als die *Wurzel* (engl. *root*).

Jeder Vertex entspricht bei dieser Abbildung divergenter Feynmangraphen auf Wurzelbäume dem primitiven Graphen der übrigbleibt, wenn man alle in ihm verschachtelt liegende Boxen zu einem Punkt zusammenschrumpfen läßt. Zur besseren Identifikation des Wurzelbaumes mit seinem korrespondierenden Feynmangraphen kann man jeden Vertex mit dem dazu korrespondierenden primitiven Subgraphen dekorieren. Man erhält dadurch sogenannte *dekorierte Wurzelbäume*. Die Menge aller dekorierten Wurzelbäume bezeichnen wir mit $\{t\}$, die einzelnen Wurzelbäume als $t_i \in \{t\}$. Zu bemerken ist, daß die Dekoration nichts mit der Kombinatorik zur Berechnung der Counterterme zu tun hat. Wir werden uns, falls nicht explizit angegeben, auf undekorierte Wurzelbäume beziehen.

Die Konstruktion der Wurzelbäume verdeutlichen wir anhand von zwei Abbildungen: Zuerst für einen dekorierten Wurzelbaum:



Das zweite Beispiel zeigt die Konstruktion eines undekorierten Wurzelbaumes. Würde man Dekorationen einführen, so trüge jeder Vertex die gleiche Dekoration, was äquivalent zu einem Wurzelbaum ohne Dekoration ist.



³Die sogenannten *überlappenden Divergenzen* werden wir zu einem späteren Zeitpunkt diskutieren.

Nachdem wir jetzt die Forests eines Feynmandiagrammen in Form von Wurzelbäumen “kodiert” haben, werden wir nun die Menge $\{t\}$ aller Wurzelbäume in eine algebraische Struktur einbetten. Dazu definieren wir eine Algebra, deren Basiselemente gerade alle Wurzelbäume aus $\{t\}$ sind. In der Mathematik bezeichnet man eine Algebra über einer Basismenge \mathcal{B} als *freie Algebra über der Menge \mathcal{B}* . Eine Zusammenfassung über die Konstruktion freier Algebren findet man zum Beispiel in [24]. Wir betrachten nun eine freie Algebra über der Menge $\{t\}$ der Wurzelbäume, die zusätzlich noch ein Einselement e bezüglich der Multiplikation besitzt. Mathematisch ausgedrückt haben wir damit eine *freie unitale Algebra*⁴ $H = (\{t\}, m, \eta)$ ⁵ konstruiert. Wir haben mit dieser Freien Algebra die Information über die divergenten Subgraphen der Feynmandiagramme in eine algebraische Struktur implementiert.

Wie können wir die iterative Struktur der *Forest-Formel* als Strukturabbildungen einer Algebra ausdrücken?

Auf der Algebra $H = (\{t\}, m, \eta)$ führen wir zunächst Operationen ein. Die erste Operation ist der sogenannte *Schnitt*. Ein Schnitt wirkt auf einen Wurzelbaum, indem er beliebig viele seiner Kanten durchtrennt, und ist durch die Menge aller Kanten, die er durchtrennt, definiert.

Um einen Schnitt mathematisch definieren zu können, bezeichnen wir die Menge aller Vertizes eines Baumes t mit $t^{[0]}$, die Menge aller Kanten mit $t^{[1]}$. Hat ein Baum t_n zum Beispiel n Vertizes, so bezeichnen wir die Vertizes $t_n^{[0]} = \{v_R, v_1, \dots, v_{(n-1)}\}$, wobei v_R die Wurzel des Baumes ist.

Wir können dann einen Wurzelbaum als einfach zusammenhängenden orientierten Graphen sehen, der jedem Vertex v_1 einen eindeutigen Pfad zur Wurzel v_R zuordnet.

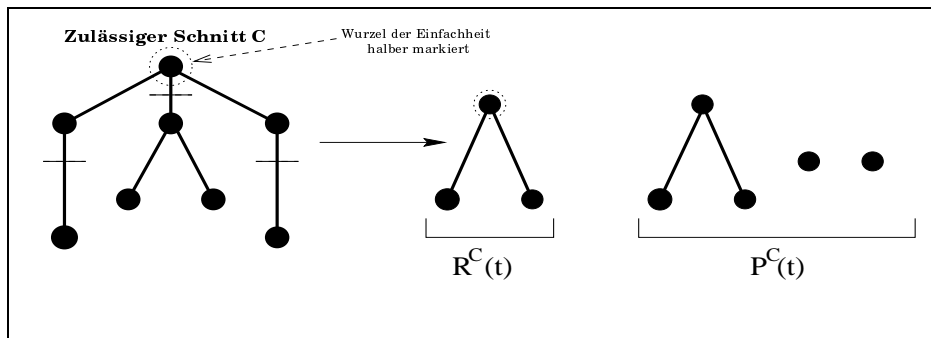
Die Kanten eines solchen Baumes t_n nummerieren wir gemäß der Bezeichnung des Vertex, auf den die Kante der Orientierung nach, also auf dem Pfad von der Wurzel aus, trifft: $t_n^{[1]} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{(n-1)}\}$. Der Schnitt $C(t_n) := \{\bar{v}_4, \bar{v}_8, \bar{v}_9\}$ zum Beispiel durchtrennt genau diese drei Vertizes des Bäumchens t_n .

Halten wir einen Baum t_n wie eine Traube an der Wurzel und schneiden die Äste gemäß eines Schnittes C ab, so bezeichnen wir die Schnittstücke, die herunterfallen, als $P^C(t_n)$ ⁶, und den Rest, den wir “in der Hand halten”, also der Teil, der die Wurzel enthält, als $R^C(t_n)$.

Schnitte, die nur eine einzige Kante durchtrennen, nennen wir *einfache Schnitte*.

Ein *zulässiger Schnitt* ist ein Schnitt der so definiert ist, daß jeder Pfad von einem Vertex zur Wurzel höchstens einmal durchtennt wird.

Hier ein Beispiel für einen zulässigen Schnitt:

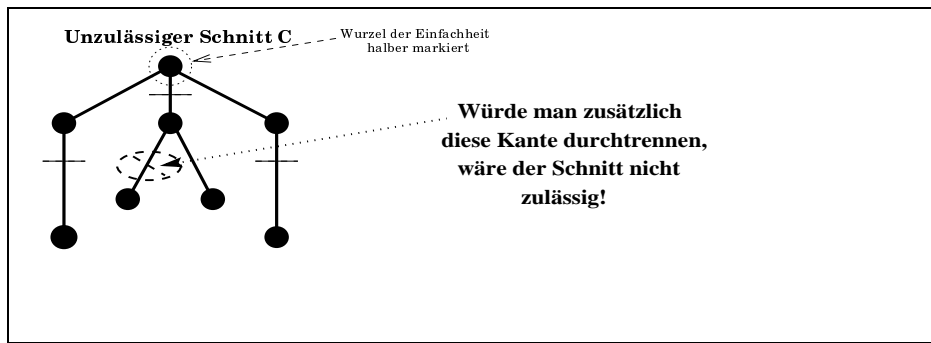


Würde der Schnitt zusätzlich noch eine weitere Kante wie in dem nächsten Beispiel durchtrennen, wäre er nicht mehr zulässig:

⁴Diese Algebra ist gerade die Tesimalgebra über dem Vektorraum mit Basis $\{t\}$.

⁵Wir verwenden die in der Theorie von Hopfalgebren übliche Schreibweise für Algebren [24].

⁶Das P deutet an, daß es sich dabei um ein Polynom von Schnittstücken handeln kann, während $R^C(t_n)$ nur aus einem Element besteht.



Bemerkung: Ein nicht zulässiger Schnitt ist trotzdem ein sinnvoller, wohldefinierter Schnitt. Der Begriff “zulässiger Schnitt” klassifiziert nur eine bestimmte Art von Schnitten.

Die Einführung eines Schnittes und der Operationen P^C, R^C erlauben es nun, die Algebra $H = (\{t\}, m, \eta)$ zu einer Hopfalgebra $\mathcal{H}_R = (\{t\}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ zu erweitern (siehe Appendix). Die dazu benötigten Strukturabbildungen Δ (Komultiplikation), ε (Koeins) und S (die Antipode) sind Algebrenhomomorphismen, die wir durch ihre Wirkung auf die Basiselemente definieren und dann linear fortsetzen.

$$\begin{aligned}
 \Delta(e) &= e \otimes e \\
 \Delta(t) &= t \otimes e + e \otimes t + \sum_{\text{Zul. Schnitte } C} P^C(t) \otimes R^C(t), \quad \forall t \neq e \\
 \varepsilon(e) &= 1, \quad \varepsilon(t) = 0, \quad \forall t \neq e \\
 S(e) &= e \\
 S(t) &= -t - \sum_{\text{zul. Schnitte } C} S[P^C(t)] R^C(t), \quad \forall t \neq e.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Wir bezeichnen diese Hopfalgebra $\mathcal{H}_R = (\{t\}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ als *Hopfalgebra der Wurzelbäume* (engl. *Hopf Algebra of Rooted Trees*).

Auffällig ist die iterative Struktur der Antipode S . Jeder Wurzelbaum $t_\Gamma \in \{t\}$ “entspricht” der verschachtelten Struktur der Subdivergenzen eines Feynmangraphen Γ . Beschränken wir uns auf eine triviale Renormierungsabbildung “id” so sehen wir, daß die Kombinatorik die iterative Struktur des Counterterms $Z(\Gamma)$ (3.14) mit der Antipode $S(t_\Gamma)$ übereinstimmt.

Geben wir ein Beispiel eines Counterterms für einen Feynmangraphen Γ mit $R = \text{id}$ und der Antipodenwirkung auf den zugehörigen Wurzelbaum t_Γ :

$$Z[\text{Diagram}] = - \text{Diagram} + 2 \text{Diagram} - (\text{Diagram})
 \tag{3.16}$$

Betrachten wir jetzt die Antipodenwirkung auf den zum Feynmangraphen Diagram gehörenden Wurzelbaum $t_\Gamma = \text{Diagram}$:

$$S[\text{Diagram}] = - \text{Diagram} + 2 \cdot \text{Diagram} - (\dots)
 \tag{3.17}$$

Anhand eines weiteren Beispiels wollen wir die iterative Struktur der Antipodenwirkung noch einmal verdeutlichen.

$$S[\text{Diagram}] = - \text{Diagram} - (S[\text{Diagram}] \cdot + 2S[\text{Diagram}] + S[\text{Diagram}])
 \tag{3.18}$$

Wie wir sehen, erscheint die Antipode des Graphen aus dem Beispiel (3.17) iteriert in dieser Gleichung auf.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 S[\text{Diagram}] &= - \text{Diagram} + \text{Diagram} \cdot - 2 \cdot \text{Diagram} + \dots \\
 &+ 2 \cdot \text{Diagram} - \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Was haben wir bis jetzt geleistet? Die Hopfalgebra \mathcal{H}_R , deren Basismenge die Forest-Struktur der Feynmangraphen trägt, enthält die Kombinatorik zur Berechnung des Counterterms von Feynmangraphen als Strukturabbildung S . Jedem Feynmangraphen Γ ohne überlappende⁷ Subdivergenzen wird eindeutig ein Wurzelbaum zugeordnet. \mathcal{H}_R ist somit die algebraische Struktur, die die Berechnung von Countertermen UV-divergenter Feynmangraphen beschreibt.

Es stellen sich jedoch noch zwei wichtige Fragen:

Was geschieht mit Diagrammen, die überlappende Divergenzen besitzen?

Auf den ersten Blick scheint die Bedingung, daß sich die Boxen bei der Konstruktion der Wurzelbäume nicht überlappen dürfen, als eine Einschränkung, besitzen doch damit nur Feynmangraphen ohne überlappende Subdivergenzen ein Äquivalent in $\{t\}$. Kreimer hat jedoch in [13] gezeigt, daß Feynmangraphen mit überlappenden Divergenzen ebenfalls ein eindeutiges Bild in der Hopfalgebra \mathcal{H}_R besitzen, zwar nicht als einfache Elemente der Basismenge, aber als Linearkombination von Basiselementen. Formal können wir diesen Sachverhalt folgendermaßen ausdrücken: Bezeichnen wir die Menge aller Feynmangraphen ohne überlappende Divergenzen mit \mathcal{F}^s , jene aller Graphen mit überlappenden Divergenzen mit \mathcal{F}^o und bezeichnen die Abbildung, die jedem Feynmangraphen ein Element der Hopfalgebra zuordnet, mit Δ , so gilt:

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{F} = \mathcal{F}^s \cup \mathcal{F}^o &\longrightarrow \mathcal{H}_R & (3.20) \\ \Delta : \mathcal{F}^s &\longrightarrow \{t\} \\ \Delta : \mathcal{F}^o &\longrightarrow \mathcal{H}_R . \end{aligned}$$

Mithin ist eine gesonderte Behandlung überlappender Divergenzen aus Sicht von Renormierung nicht notwendig, da die Antipode auf jedes beliebige Element der Hopfalgebra \mathcal{H}_R wirkt und dessen Counterterm bestimmt. Schon 1966 hat Hepp in [26] gezeigt, daß eine separate Behandlung der Renormierung von Graphen mit überlappenden Subdivergenzen gegenüber der Renormierung von Graphen ohne überlappende Subdivergenzen nicht notwendig ist. Zum Beweis dieser Aussage führt Hepp sogenannte *Sektoren* ein. Diese Sektoren überlappen nie, auch nicht im Fall überlappender Divergenzen. Mit Hilfe dieser Sektoren gelingt ihm eine Beschreibung des Renormierungsprozesses, womit die gesonderte Betrachtung überlappender Divergenzen überflüssig wird. Diese Sektoren korrespondieren mit Wurzelbäumen.

Der Beweis für die Behauptungen (3.20) ist dabei rein mengentheoretischer Natur und in [13] nachzulesen. Eine Erweiterung der Hopfalgebrenstruktur zur gesonderte Behandlung überlappender Divergenzen ist deshalb nicht notwendig.

Wie bringt man die Renormierungsabbildung für die Forest Formel (3.14) ins Spiel?

In unserer bisherigen Konstruktion haben wir die *Forest-Formel* bereits in ihrer Kombinatorik implementiert. Um nichttriviale Renormierung zu ermöglichen, müssen wir jedoch Renormierungsabbildungen verschiedener Renormierungsschemata berücksichtigen. Es stellt sich heraus, daß sich die Anwendung von Renormierungsabbildungen auf ein Problem der Darstellungen von \mathcal{H}_R reduziert, was wir in den nächsten Kapiteln erarbeiten wollen.

3.3 Der Darstellungsraum V

Um Streuquerschnitte berechnen zu können, müssen die Feynmangraphen der zu berechnenden Störungsreihe ausgewertet werden. Wir haben in Kapitel 3.1 bereits diskutiert, daß die Feynmangraphen aufgrund ihrer UV-Divergenzen renormiert werden müssen, um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Dabei haben wir in Kapitel 3.1 noch nicht geklärt, wie man explizit die Counterterme berechnet, sondern nur deren iterative Struktur erläutert. Dazu benötigen wir die in 3.1 noch nicht weiter diskutierten Renormierungsabbildungen.

Der Begriff der Renormierungsabbildung und der damit verbundenen Darstellungen der Hopfalgebra \mathcal{H}_R soll nun in den nächsten Kapiteln bearbeitet werden.

Renormierungsabbildungen sind mit sogenannten Renormierungsschemata verknüpft.

Wir geben zunächst eine grobe Unterteilung von Renormierungsverfahren

⁷Boxen durften in unserer Konstruktion nicht überlappen. Vgl. Konstruktion der Forests [27].

1. Renormierung ohne Regularisierung durch Modifikation des Integranden
2. Renormierung mit Regularisierung.

Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir etwas zu der Beziehung dieser beiden Punkte sagen. Zunächst wollen wir aber Renormierungsschemata mit Regularisierung diskutieren. Dazu müssen wir zuerst einmal sagen, was Regularisierung überhaupt ist. Kurz gesagt ist Regularisierung ein Verfahren, das es erlaubt, UV-divergenten Integralen durch Modifikation des Integrals einen analytisch berechenbaren Ausdruck zuzuordnen. Bei dieser Modifikation der Integrale wird ein Regularisierungsparameter eingeführt, mit dessen Hilfe man die Modifikation wieder rückgängig machen kann, also das ursprünglich divergente Integral wieder zurückerhält.

Betrachten wir ein Integral, das für sehr große Werte seiner Schleifenimpulse (Integration) divergiert. Beispielsweise kann man Regularisierung durch einen *Abschneideparameter* (engl. *cut-off*) für große Impulse erzielen. Wir fordern dabei, daß für alle Komponenten des Vierer-Impulses die Beziehung $k_\mu \leq \Lambda$ gilt, wobei wir Λ den Abschneideparameter nennen. Diese Regularisierung kann man durch $\Lambda \rightarrow \infty$ wieder rückgängig machen, wodurch der regularisierte Ausdruck wieder in das ursprüngliche divergente Integral übergeht. Nehmen wir ein einfaches logarithmisch divergentes Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+c} dx . \quad (3.21)$$

Durch einen *Abschneideparameter* erhält man

$$\int_0^\Lambda \frac{1}{x+c} dx \sim \ln \Lambda . \quad (3.22)$$

Hat man auf diese Weise regularisiert, muß man nun versuchen, die in Λ divergenten Terme durch Subtraktion geeigneter Abzugsterme zu eliminieren. Leider hat die Abschneideparameter-Regularisierung auch Nachteile:

- Poincaré-Invarianz geht verloren
- Eichinvarianz geht verloren.

Da diese zwei Punkte wesentliche Bestandteile störungstheoretischer Quantenfeldtheorie sind, verwendet man lieber andere Regularisierungsverfahren.

Eine weitere Regularisierung erhält man durch Diskretisierung des Raumes mithilfe eines Gitters. Aufgrund dieses Gitters sind die Raumkomponenten der Impulse k_μ auf einen Bereich beschränkt, der proportional der Inversen des Gitterabstandes ist, wodurch man eine Regularisierung erhält. Die ursprünglichen divergenten Ausdrücke erhält man somit durch einen Limes des Gitterabstandes gegen Null wieder. Aber auch hier gibt es Nachteile:

- Rotationsinvarianz geht verloren
- Poincaré-Invarianz geht verloren.

Eine weitere Möglichkeit ist die *Pauli-Villars*-Regularisierung, bei der man jedem Propagator eines Feynmangraphen einen Abzugsterm zuordnet, der dem ursprünglichen Propagator mit geänderter Masse entspricht. Betrachten wir zum Beispiel ein skalares Teilchen, so wird der Propagator

$$\frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} , \quad (3.23)$$

durch einen Propagator

$$\left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \left(\frac{1}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 + \Lambda^2 - i\varepsilon}\right) \quad (3.24)$$

ersetzt. In der Quantenelektrodynamik tritt dabei ein Nachteil der *Pauli-Villars*-Regularisierung auf: Photonenpropagatoren erhalten als Abzugsterm einen massiven Photonenpropagator, was einer Verletzung der Eichinvarianz entspricht. Ein weiterer Nachteil der *Pauli-Villars*-Regularisierung entsteht durch das negative Vorzeichen des Abzugspropagators. Der zu einer solchen Theorie gehörende Hamiltonoperator wäre nicht mehr positiv definit, was einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation und damit einer quantentheoretischen Interpretation widersprechen würde.

Ein Regularisierungsverfahren, das die Eichinvarianz und die Poincaré-Symmetrie respektiert, ist die *dimensionale Regularisierung* [27, 30]. Hierbei verwendet man einen kleinen Trick: die Dimension d der Raumzeit wird in eine (möglicherweise komplexe) Dimension D übergeführt, was eine Regularisierung des Integrals ermöglicht. Wir bezeichnen mit ε den Regularisierungsparameter

$$\varepsilon = \frac{d - D}{2} . \quad (3.25)$$

Durch eine Separation des Unterraumes, der von den äußeren Impulsen eines zu berechnenden Prozesses aufgespannt wird, kann man den Integrationsraum in einen Unterraum parallel zu diesen äußeren Impulsen und einen dazu orthogonalen Unterraum zerlegen, äquivalent der Zerlegung eines dreidimensionalen Raumes in Kugelkoordinaten, wobei die Integration über den Orthogonalraum einem Integral über die $(D - P)$ -Sphäre entspricht, wo P die Dimension des Parallelraumes ist. Das Orthogonalraumintegral ist per Definitionem unabhängig von den äußeren Impulsen. Die ursprüngliche Theorie erhält man im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ wieder zurück. Die so regularisierten divergenten Integrale lassen sich in eine Laurentreihe in ε mit rationalen Koeffizienten darstellen, wobei diese Laurentreihen nur endliche Polordnung besitzen, welche durch die Schleifenordnung der zu berechnenden Graphen gegeben ist. Die äußeren Parameter eines Feynmangraphen, wie äußere Impulse und Massen, treten in den Koeffizienten der Laurentreihe als Polynome verallgemeinerter Polylogarithmen auf. Der große Vorteil dimensionaler Regularisierung ist, daß sowohl die Symmetrien, wie Poincaré- und Eichinvarianz, erhalten bleiben, als auch skalenunabhängige Ausdrücke verschwinden, die in der nachfolgenden Renormierung ohnehin keine Rolle spielen, was effizient für die Berechnungen der Graphen ist: $\int d^D k (k^2)^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}$.

Aus diesen Gründen werden wir in dieser Arbeit unter dem Begriff "Regularisierung" immer dimensionale Regularisierung verstehen. Ein einfaches Beispiel soll dies anhand eines divergenten Integrals verdeutlichen: Betrachten wir das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{y+x} \frac{1}{x+c} dx dy . \quad (3.26)$$

Dieses Integral ist sowohl überalles- als auch in seiner y -Integration divergent. Dimensionale Regularisierung liefert folgenden Ausdruck:

$$\int_0^\infty \frac{y^{-\varepsilon}}{y+x} \frac{x^{-\varepsilon}}{x+c} dx dy , \quad (3.27)$$

wobei sich dieses Integral als Laurentreihe

$$\begin{aligned} & c^{-2\varepsilon} B(2\varepsilon, 1 - 2\varepsilon) B(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \\ &= c^{-2\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon) \Gamma(2\varepsilon) \Gamma(1 - 2\varepsilon) \\ &= c^{-2\varepsilon} \frac{\Gamma(2\varepsilon + 1)}{2\varepsilon} \Gamma(1 - 2\varepsilon) \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{\varepsilon} \Gamma(1 - \varepsilon) \\ &\sim \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{\ln(c)}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \end{aligned} \quad (3.28)$$

darstellen läßt.

Die Ergebnisse dieses Beispiels lassen sich auf Feynmangraphen verallgemeinern: Die regularisierten Integrale lassen sich als Laurentreihe im Regularisierungsparameter ausdrücken. Die Frage ist, welche Zahlenmenge diesem Polynomraum zugrundeliegt. Diese Zahlenmenge muß alle Zahlen beinhalten, die bei der Berechnung von Feynmandiagrammen auftreten können. Bei der Berechnung von Feynmandiagrammen gehen neben dem Körper der rationalen Zahlen noch andere nichtrationale Zahlen ein.

Als erstes betrachten wir geeignet verallgemeinerte multiple Zetawerte (engl.: *multiple Zeta-values*). Wir bezeichnen mit \mathbf{Q}^* den Zahlenkörper \mathbf{Q} vereinigt mit der Menge dieser geeignet verallgemeinerten multiplen Zetawerte. Der Raum der Laurentreihen $\mathbf{Q}^*[\varepsilon^{-1}, [\varepsilon]]$ ist dabei der minimale Wertebereich für die analytische Auswertung dimensional regularisierter Feynmangraphen, wobei wir diesen Raum im nächsten Schritt durch weitere nichtrationale Größen erweitern werden. Die Schreibweise ist wie folgt zu verstehen: Eine eckige Klammer symbolisiert Polynome endlicher Ordnung, doppelte Klammern symbolisieren Reihen mit unendlicher Ordnung. $\mathbf{Q}^*[\varepsilon^{-1}, [\varepsilon]]$ beschreibt also Laurentreihen mit endlicher Polordnung.

Weiterhin treten bei der Berechnung von Feynmangraphen Logarithmen reeller Größen auf. Diese reellen Größen resultieren aus Parametern wie Massen und äußeren Impulsen, die zur Beschreibung eines Streuprozesses notwendig sind. Wir werden im weiteren Verlauf der Arbeit diese reellen Größen als *Skalen* bezeichnen. Dabei sind in dem analytischen Ausdruck der regularisierten Feynmangraphen die Logarithmen selbst eine Indeterminante einer Reihe. Das bedeutet, wir haben es nicht nur mit einer Laurentreihe in ε zu tun, sondern gleichzeitig mit einer Reihe in dem Logarithmus der auftretenden Skala.

Wie erkennt man ein Integral, daß nur eine Skala beinhaltet?

Betrachten wir ein Integral $I(q)$, wobei q ein positiver reeller Parameter ist. Wir definieren eine Zahl ω wie folgt: Ist $\omega(I)$ die kanonische Dimension des Powercountings des Integrals I , so bezeichnen wir mit

$$\omega := \lim_{d \rightarrow D} \omega(I) \quad (3.29)$$

die kanonische Dimension des Powercountings nach dimensionaler Regularisierung, wobei d die ursprüngliche und D die dimensional regularisierte Dimension des Integrationsraumes ist.⁸ Wir sagen, daß das Integral $I(q)$ nur von einer Skala q abhängt, falls sich das Integral wie folgt transformiert:

$$I(q) = \lambda^{-\omega} I(\lambda q) . \quad (3.30)$$

Bemerkung: Im folgenden werden wir in dieser Arbeit nur Laurentreihen betrachten, die durch eine Skala charakterisiert sind. Dies ist allerdings keine generelle Einschränkung.

In unserem Modell (3.26) verhält es sich ganz genauso wie bei der Berechnung Feynmangraphen echter Quantenfeldtheorien. In der zugehörigen Reihendarstellung (3.28) tritt der Parameter c als $c^{-2\varepsilon}$ auf. Eine Entwicklung des Terms liefert die Logarithmen $1 - 2 \ln c + (2 \ln c)^2/2 + \mathcal{O}(c^3)$. Somit können wir jeden Feynmangraphen als Laurentreihe im Regularisierungsparameter ε folgenden Raumes darstellen:

$$V := \mathbf{Q}^*[\varepsilon^{-1}, [\varepsilon]] \llbracket \ln a \rrbracket . \quad (3.31)$$

Tatsächlich ist allerdings nicht der ganze Polynomring V der Wertebereich der dargestellten Feynmangraphen, denn betrachtet man (3.28), so treten die Logarithmen nicht in den führenden Poltermen auf. Diesen Punkt werden wir aber in einem späteren Kapitel über die Charaktere von \mathcal{H}_R noch einmal diskutieren.

Noch eine Bemerkung zu dem Integral (3.26): Betrachtet man Renormierungstheorie, so ist die Behandlung solcher Spielzeugmodelle im Sinne von Renormierung äquivalent mit denen echter Quantenfeldtheorien [11]. Dieses Spielzeugmodell reduziert sich auf die Betrachtung logarithmisch-divergenter Integrale, was jedoch keine Einschränkung ist, da sich jedes Feynmanintegral mit anderem Divergenzverhalten, wie lineare oder quadratische Divergenzen, durch Differentiation bzw. durch Taylorentwicklung in ein logarithmisch-divergentes Problem überführen läßt. Egal welchen Divergenzgrad das Integral besitzt, dimensionale Regularisierung liefert immer eine Laurentreihe mit Polen endlicher Ordnung. Lediglich die Koeffizienten auftretender Gammafunktionen ändern sich.

Die Rolle der äußeren Parameter wird ebenfalls durch die Konstanten dieser Spielzeugmodelle wiedergespiegelt. Da wir uns in der vorliegenden Arbeit mit Renormierungstheorie beschäftigen,

⁸In ϕ_6^3 -Theorie gilt somit $\omega = nD - \sharp_{\text{prop}}$, wobei $D = 6 - 2\varepsilon$ die dimensional regularisierte Dimension, n die Anzahl der Loops und \sharp_{prop} die Anzahl der Propagatoren ist.

werden wir solche Integrale als Spielzeugmodelle für Beispielrechnungen benutzen, da sie wesentlich übersichtlicher als jene Ausdrücke sind, die man beim Berechnen von Feynmandiagrammen erhält. Bis jetzt haben wir mit \mathcal{H}_R eine algebraische Formulierung gefunden, die die Kombinatorik der Zimmermannschen Forest Formula als notwendige Strukturabbildung beinhaltet. Weiterhin haben wir den Polynomraum V diskutiert, auf dem die Feynmanintegrale bei dimensionaler Regularisierung ausgewertet werden. Im nächsten Schritt wollen wir nun die Darstellungen, also die Menge aller Algebrenhomomorphismen in $\mathcal{H}_R^* \otimes V$, also $\{\phi \in \mathcal{H}_R^* \otimes V \mid \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}_R\}$, welche wir als *Charaktere*⁹ bezeichnen, näher untersuchen.

Zum Thema BPHZ werden wir an späterer Stelle nach Diskussion der Renormierungsabbildungen noch etwas sagen.

3.4 Die Charaktere von \mathcal{H}_R

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, wie man das Renormierungsverfahren anhand der Darstellungen der Hopfalgebra \mathcal{H}_R auf den Ring V algebraisch formulieren kann. Wir haben bereits im letzten Kapitel erwähnt, daß wir durch die Darstellungstheorie die Wirkung von Renormierungsabbildungen implementieren können. Bis zur Implementierung der Renormierungsabbildungen sind allerdings noch einige Punkte zu diskutieren. Wir beginnen mit den Darstellungen der Hopfalgebra \mathcal{H}_R auf dem Ring V , die wir als *Charaktere* bezeichnen werden. Beginnen wir mit der Definition einiger wichtiger Begriffe.

Zuersteinmal wollen wir den Begriff des *Baumgewichtes* einführen.

Jedem Vertex v eines dekorierten Wurzelbaumes t können wir eine sogenannte *Vertexkonstante* $\omega(v)$ zuordnen, welche der Schleifenanzahl der Dekoration des Vertex entspricht. Im undekorierten Fall ist die Vertexkonstante gerade $\omega(v) \equiv 1$.

Mithilfe der Vertexkonstante können wir das sogenannte *Baumgewicht*

$$\omega(t) = \sum_{v \in t^{[0]}} \omega(v) \quad (3.32)$$

einführen. Es entspricht somit einer Art "Loopgewicht" der anhängenden Vertizes. Dieses Gewicht können wir nicht nur jedem Baum t , sondern auch jedem seiner Vertizes $v_i \in t^{[0]}$ zuordnen, indem wir das Baumgewicht des Baumes t_i mit Wurzel v_i berechnen, der durch Abschneiden der über dem Vertex v_i liegenden Kante, $C = \{\bar{v}_i\}$, entsteht

$$\omega(t_i) = \sum_{v \in t_i^{[0]}} \omega(v) . \quad (3.33)$$

Mit dem *Baumgewicht* haben wir also die Loopordnung eines Feynmangraphen als Funktion seines zugehörigen Wurzelbaumes ausgedrückt. Die Polordnung eines dimensional regularisierten Graphen entspricht dabei der Summe der Vertizes des zu ihm gehörenden Wurzelbaumes.

Bei der Berechnung von Feynmangraphen spielen auch die äußeren Parameter eine bedeutende Rolle. Wir definieren Derivationen

$$a : \{t\} \longrightarrow \mathbf{R}_+ , \quad (3.34)$$

die wir als Skalen bezeichnen, wobei

$$a(t_1 t_2) := \varepsilon(t_1) a(t_2) + a(t_1) \varepsilon(t_2) . \quad (3.35)$$

Auf Monome höheren Grades von Wurzelbäumen wirken diese Derivationen trivial.

Halten wir uns noch einmal unser Ziel vor Augen: Wir wollten Darstellungen beziehungsweise Abbildungen der Hopfalgebra \mathcal{H}_R auf den Polynomraum V definieren. Diese Abbildungen sollten jedem Baum Laurentreihen in ε zuordnen, wobei die Koeffizienten der Laurentreihe Elemente aus

⁹Dieser Begriff ist nicht gleich dem in der Darstellungstheorie üblichen Begriff des Charakters.

\mathbf{Q}^* plus zusätzlicher Logarithmen von Skalen sein können. Solche Darstellungen entsprechen dann der in der störungstheoretischen Quantenfeldtheorie üblichen Berechnung von Feynmangraphen, die wir dimensional regularisiert haben.

Versuchen wir nun solche Abbildungen von \mathcal{H}_R nach V zu klassifizieren.

Wir definieren folgende Funktion

$$\begin{aligned} B(\varepsilon) : t^{[0]} &\longrightarrow \text{span}_{\mathbf{Q}^*}(\varepsilon^{-1}) \oplus \mathbf{Q}^*[[\varepsilon]] \\ v &\longmapsto B_{\omega(v)}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.36)$$

wobei $\text{span}_{\mathbf{Q}^*}(\varepsilon^{-1})$ die \mathbf{Q}^* -lineare Hülle von ε^{-1} ist, und bezeichnen mit \mathcal{B} die Menge aller solchen Abbildungen $B(\varepsilon)$, also $\mathcal{B} \cong \text{span}_{\mathbf{Q}^*}(\varepsilon^{-1}) \oplus \mathbf{Q}^*[[\varepsilon]]$ als Menge. Wie interpretieren wir diese Menge? Wir haben bereits erwähnt, daß die Polordnung eines analytischen Wertes für regularisierte Feynmanintegrale gleich der Anzahl der Vertizes eines Wurzelbaumes ist. Betrachtet man einen primitiven Graphen, so ist sein analytischer Wert gerade eine Laurentreihe mit einem Pol erster Ordnung, was einem Wert $B_{\omega(\bullet)}(\varepsilon)$ entspricht (bei einer äußeren Skala $a \equiv 1$). Da ein allgemeiner Wurzelbaum aus mehreren Vertizes zusammengesetzt ist, ist es naheliegend, daß sein dargestellter analytischer Wert gerade ein Produkt solcher Laurentreihen $B_{\omega(\bullet)}(\varepsilon)$ ist. Wir definieren deshalb:

$$B^a := \left\{ a(t)^{-\omega(t)\varepsilon} \prod_{v \in t^{[0]}} B_{\omega(v)}(\varepsilon) \mid t \in \mathcal{H}_R \text{ und } B_{\omega(v)} \in \mathcal{B} \right\}. \quad (3.37)$$

Wir verallgemeinern diese Menge für beliebig viele Skalenfaktoren, hier im Beispiel für zwei Skalenfaktoren,

$$B^{ab} := \left\{ a(t)^{-\omega(t)\varepsilon} b(t)^{-\omega(t)\varepsilon} \prod_{v \in t^{[0]}} B_{\omega(v)}(\varepsilon) \mid t \in \mathcal{H}_R \text{ und } B_{\omega(v)} \in \mathcal{B} \right\}, \quad (3.38)$$

wobei die Definition für n verschiedene Skalenfaktoren $B^{a_1 \dots a_n}$ analog verläuft.

Bemerkung: Auf den ersten Blick scheint dies keine Verallgemeinerung zu sein, könnte man

$$a(t)^{-\omega(t)\varepsilon} b(t)^{-\omega(t)\varepsilon} = [a(t)b(t)]^{-\omega(t)\varepsilon} = \tilde{a}(t)^{-\omega(t)\varepsilon}$$

definieren. Die Verallgemeinerung ist so zu verstehen, daß die beiden Skalen als unabhängig in folgendem Sinne betrachtet werden:

- Für $a(t) \equiv 1 \forall t \in \{t\}$ geht B^{ab} in B^b über. Umgekehrt gilt $b(t) \equiv 1 \forall t \in \{t\} : B^{ab} \rightarrow B^a$
- Durch Taylorentwicklung nach den beiden Skalen kann ein Polynom aus B^{ab} in eine Summe von Polynomen mit jeweils einer Skala entwickelt werden.

Die Verallgemeinerung auf Laurentreihen mit beliebig vielen Skalen ist analog der Definition von B^{ab} zu verstehen.

Bis jetzt haben wir Teilmengen von V klassifiziert, die, wie wir gleich sehen werden, den Wertebereich der Darstellungen von \mathcal{H}_R angeben.

Im folgenden werden wir uns zuerst nur auf skalare Theorien beschränken, wobei wir zu einem späteren Zeitpunkt noch etwas über Theorien mit Formfaktoren sagen werden.

In der Definition (3.34) waren die Skalenfaktoren baumabhängig definiert worden, was für spätere Betrachtungen von Interesse ist. Baumunabhängige Skalenfaktoren sind dabei gerade konstante Funktionen $a(t) = \text{const} \forall t \in \{t\}$.

Betrachten wir noch einmal Feynmangraphen, die durch einen äußeren Parameter beschrieben werden. Berechnen wir zu einem solchen Feynmangraphen Γ das dazugehörige dimensional regularisierte Feynmanintegral, so erhalten wir eine Laurentreihe, die ein Element der Menge $B^a \subset V$ ist. Wenn wir diesen Vorgang mithilfe der Hopfalgebra \mathcal{H}_R ausdrücken wollen, so entspricht dies einer Darstellung des zu Γ korrespondierenden Wurzelbaumes t_Γ in die Menge aller Polynome B^a , falls wir den äußeren Parameter von Γ mit $a(\Gamma)$ bezeichnen. Wir bezeichnen solche Darstellungen, die durch einen Skalenfaktor $a(t)$ definiert sind, mit ϕ_a :

$$\begin{aligned} \phi_a : \mathcal{H}_R &\longrightarrow B^a \\ \phi_a(t) &:= \phi_{a(t)}(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Bemerkung: Da der Skalenfaktor a nur auf der Menge $\{t\}$ der Wurzelbäume definiert ist (3.34), so ist der Begriff "linearität" wie folgt zu verstehen:

$$\begin{aligned}\phi_a(\lambda t) &:= \phi_{a(t)}(\lambda t) = \lambda \phi_{a(t)}(t) \quad \forall \lambda \in \mathbf{Q}^* \\ \phi_a(\lambda t_1 + \nu t_2) &= \lambda \phi_a(t_1) + \nu \phi_a(t_2) \quad \forall \lambda, \nu \in \mathbf{Q}^* \\ \phi_a(t_1 t_2) &:= \phi_a(t_1) \phi_a(t_2) .\end{aligned}\tag{3.40}$$

Wir bezeichnen die Darstellungen von \mathcal{H}_R auf V , da sie Algebrenhomomorphismen von einer Algebra in einen Ring sind, als *Charaktere*¹⁰.

Wir bezeichnen den Skalenfaktor $a(t)$ im Bezug auf die Darstellungen als *Darstellungspunkt* oder einfach nur als *Skala*.

Dabei sind Charaktere mit mehr als einer Skala wie folgt definiert (am Beispiel für zwei Darstellungspunkte):

$$\begin{aligned}\phi_{ab} : \mathcal{H}_R &\longrightarrow B^{ab} \\ \phi_{ab}(\lambda t_1 + \nu t_2) &:= \phi_{a(t_1)b(t_1)}(\lambda t_1) + \phi_{a(t_2)b(t_2)}(\nu t_2).\end{aligned}\tag{3.41}$$

Natürlich kann es mehrere Darstellungen geben, die durch dieselbe Skala definiert sind. Wir unterscheiden dies durch einen oben gestellten Index ϕ_a^k . Diese Notation wird im folgenden beibehalten werden: der untere Index ist der Darstellungspunkt und der obere Index, der Unterscheidbarkeit halber als griechischer Buchstabe oder explizit als Zahl angegeben, unterscheidet verschiedene Darstellungen mit diesem Darstellungspunkt.

Die nun folgenden einfachen Beispiele zeigen, wie solch unterschiedliche Darstellungen aussehen können:

$$\begin{aligned}\phi_a^1(t) &:= \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} \prod_{j=1}^{f(t)} \Phi_x^1(t_j) dx \\ \phi_a^2(t) &:= \int_a^\infty x^{-1-\varepsilon} \prod_{j=1}^{f(t)} \Phi_x^2(t_j) dx ,\end{aligned}\tag{3.42}$$

wobei

$$t = B_+ \left[\prod_{j=1}^{f(t)} t_j \right]\tag{3.43}$$

und $f(t)$ die Anzahl der Kanten ist, die von der Wurzel auslaufen. Der Operator B_+ erzeugt dabei aus einem Produkt von Wurzelbäumen durch Hinzufügen einer Wurzel einen neuen Wurzelbaum (eine genaue Definition wir in 3.46 gegeben). Man nennt $f(t)$ die *Fertilität* des Baumes t . Ist C ein Schnitt, der alle Kanten durchtrennt, die von der Wurzel auslaufen, so gilt

$$P^C(t) = \prod_{j=1}^{f(t)} t_j .\tag{3.44}$$

Im Fall dieses Schnittes bezeichnet man P^C auch als den Operator B_- :

$$B_-(t) = \prod_{j=1}^{f(t)} t_j .\tag{3.45}$$

Weiterhin existiert noch ein Operator B_+ mit der Eigenschaft

$$B_+(B_-(t)) = t .\tag{3.46}$$

¹⁰Üblicherweise bezeichnet man k -wertige Algebrenhomomorphismen einer k -Algebra als Charaktere. Gemäß Connes, Kreimer verwenden wir diese Bezeichnung für die Darstellungen von \mathcal{H}_R auf den Raum V [6, 7].

Bemerkung: Die Eigenschaft (3.46) gilt nicht für ein Produkt von Wurzelbäumen, da der Operator B_- derivativ wirkt [10]!

Wir wollen an dieser Stelle ein paar Beispiele für die beiden Charaktere in (3.43) geben. Beginnen wir mit Φ_a^1 (für $a(t) = a = \text{const.}$):

$$\begin{aligned}
\phi_a^1(\bullet) &= \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} dx & (3.47) \\
&= a^{-\varepsilon} B(\varepsilon, 1-\varepsilon) \\
&= a^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(\varepsilon+1)\Gamma(\varepsilon-1)}{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} - \ln(a) + \frac{1}{6}(\pi^2 + 3(\ln(a))^2)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
\phi_a^1(\bullet\bullet) &= \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} \frac{y^{-\varepsilon}}{y+x} dy dx \\
&= B(\varepsilon, 1-\varepsilon) \int_0^\infty \frac{x^{-2\varepsilon}}{x+a} dx \\
&= a^{-2\varepsilon} B(2\varepsilon, 1-2\varepsilon) B(\varepsilon, 1-\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{\ln(a)}{\varepsilon} + \left(\frac{5\pi^2}{12} + (\ln(a))^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Jetzt die Beispiele für Bäume mit drei Vertices:

$$\begin{aligned}
\phi_a^1(\bullet\bullet\bullet) &= \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} \frac{y^{-\varepsilon}}{y+x} \frac{z^{-\varepsilon}}{z+x} dz dy dx \\
&= (B(\varepsilon, 1-\varepsilon))^2 \int_0^\infty \frac{x^{-3\varepsilon}}{x+a} dx \\
&= a^{-3\varepsilon} B(3\varepsilon, 1-3\varepsilon) (B(\varepsilon, 1-\varepsilon))^2 \\
&= \frac{1}{3\varepsilon^3} - \frac{\ln(a)}{\varepsilon^2} + \frac{11\pi^2 + 27(\ln(a))^2}{18\varepsilon} + \left(\frac{1}{6} \ln(a) (11\pi^2 + 9(\ln(a))^2) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
\phi_a^1(\bullet\bullet\bullet) &= \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} \frac{y^{-\varepsilon}}{y+x} \frac{z^{-\varepsilon}}{z+y} dz dy dx \\
&= B(\varepsilon, 1-\varepsilon) \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} \frac{y^{-2\varepsilon}}{y+x} dy dx \\
&= B(2\varepsilon, 1-2\varepsilon) B(\varepsilon, 1-\varepsilon) \int_0^\infty \frac{x^{-3\varepsilon}}{x+a} dx \\
&= a^{-3\varepsilon} B(3\varepsilon, 1-3\varepsilon) B(2\varepsilon, 1-2\varepsilon) B(\varepsilon, 1-\varepsilon) \\
&= \frac{1}{6\varepsilon^3} - \frac{\ln(a)}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{7\pi^2}{18} + \frac{3(\ln(a))^2}{4} \right) - \frac{7}{6}\pi^2 \ln(a) - \frac{3}{4}(\ln(a))^3 + \mathcal{O}(\varepsilon) .
\end{aligned}$$

Anhand dieser Beispiele können wir schon sehen, wie sich die verschachtelte Struktur der Divergenzen in den Darstellungen der Hopfalgebra widerspiegelt.

Der zweite Charakter ist ein wenig übersichtlicher als der erste. Wir wollen die gleichen Wur-

zelbäume zur Darstellung nutzen:

$$\begin{aligned}
\phi_a^2(\bullet) &= \int_a^\infty x^{-1-\varepsilon} dx & (3.48) \\
&= a^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \\
\phi_a^2(\mathfrak{!}) &= \int_a^\infty \int_x^\infty x^{-1-\varepsilon} y^{-1-\varepsilon} dy dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_a^\infty x^{-1-2\varepsilon} dx \\
&= a^{-2\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Und die Beispiele für Bäume mit drei Vertizes:

$$\begin{aligned}
\phi_a^2(\mathfrak{!}) &= \int_a^\infty \int_x^\infty \int_x^\infty x^{-1-\varepsilon} y^{-1-\varepsilon} z^{-1-\varepsilon} dz dy dx \\
&= a^{-3\varepsilon} \frac{1}{3\varepsilon^3} \\
\phi_a^2(\mathfrak{!}) &= \int_a^\infty \int_x^\infty \int_y^\infty x^{-1-\varepsilon} y^{-1-\varepsilon} z^{-1-\varepsilon} dz dy dx \\
&= a^{-3\varepsilon} \frac{1}{6\varepsilon^3} .
\end{aligned}$$

Diese Beispiele geben ein Gefühl für die Charaktere der Hopfalgebra \mathcal{H}_R .

Bemerkung: Jeder Charakter repräsentiert eine eigene Theorie. In den Beispielen (3.43) sind dies Spielzeugmodelle. Ebenso ergeben analytische Auswertungen von Quantenfeldtheorien jeweils einen eigenen Charakter, der durch die Dekoration der Vertizes gegeben ist.

Die Darstellungspunkte spielen dabei in folgendem Sinne eine universelle Rolle: Wir werden zeigen, daß wir mit Hilfe der Darstellungspunkte in der Lage sind, scheinbar unterschiedliche Renormierungsverfahren wie BPHZ, MS und On-Shell-Renormierung, als On-Shell-Renormierung mit baumabhängigen Skalen darzustellen [3].

Wie wir mithilfe der Charaktere die Zimmermannsche *Forest*-Formel (3.14) formulieren können, werden die nächsten Kapitel zeigen. Zunächst sollen jedoch die Renormierungsabbildungen diskutiert werden, die wir für die Formulierung der *Forest*-Formel benötigen.

3.5 Renormierungsabbildungen, Skalenwechsel und das Baumdifferential

Renormierungsabbildungen treten in der *Forest*-Formel (3.14) auf, wo sie auf die “ausgeschnittenen” divergenten Teilgraphen beziehungsweise deren dargestellte Laurentreihen wirken.

Wir betrachten Renormierungsabbildungen als Endomorphismen des Ringes V : $R \in \text{End}(V)$.

Was für eine Eigenschaft soll eine solche Renormierungsabbildung haben?

In (3.12) haben wir gesehen, welche Rolle die Renormierungsabbildung bei der Renormierung primitiver Feynmangraphen Γ_p , also Graphen ohne Subdivergenzen, haben soll:

$$Z(\Gamma_p) = -R[\Gamma_p] . \quad (3.49)$$

Ein primitiver Feynmangraph findet seinen Counterpart in \mathcal{H}_R als ein einzelner (dekorierter) Vertex \bullet . Betrachten wir einen beliebigen Charakter $\phi \in \mathcal{H}_R^* \otimes V$, wobei wir an diesem Punkt die Betrachtung des Skalenfaktors vernachlässigen, $a(t) = 1 \quad \forall t \in \{t\}$. In dem letzten Kapitel haben wir gesehen (3.37), daß einem einzelnen Vertex immer eine Laurentreihe mit einfachem Pol zugeordnet wird. Das dargestellte Polynom eines primitiven Graphen hat also die Form

$$\phi(\bullet) = \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) . \quad (3.50)$$

Laut (3.49) existiert ein Abzugsterm $Z(\phi(\bullet)) = -R(\phi(\bullet))$, so daß $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(\bullet) + Z(\phi(\bullet)) < \infty$. Man sieht, daß der allgemeinste Ansatz für die Wirkung einer Renormierungsabbildung auf einen dargestellten primitiven Graphen

$$R[\phi(\bullet)] = \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}'(\varepsilon^0) \quad (3.51)$$

ist. Denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}'(\varepsilon^0) \right) \right) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\mathcal{O}(\varepsilon^0) - \mathcal{O}'(\varepsilon^0) \right) < \infty . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mit anderen Worten: Eine Renormierungsabbildung ändert nichts am Polverhalten des Polynoms, oder, anders ausgedrückt, sie respektiert das Verhalten für große interne Schleifenimpulse. Dabei ist es nicht von Bedeutung, auf welche Art und Weise die Renormierungsabbildung den endlichen Teil des Polynoms beeinflusst. Wichtigster Vertreter der Renormierungsabbildungen ist R_{MS} , die Renormierungsabbildung des *Minimal-Subtraction*-Schema. $R_{MS} : V \rightarrow V$ ist dabei nichts anderes als eine Projektion auf den Polteil der Laurentreihe und ersetzen aller Skalen durch 1. Wir bezeichnen die Wirkung von R_{MS} mit

$$R_{MS}(\phi(t)) =: \langle \phi(t) \rangle . \quad (3.53)$$

Für die Projektion R_{MS} gilt

$$R_{MS} \left[\phi^\alpha(t_1) \phi^\beta(t_2) \right] \neq R_{MS} \left[R_{MS}[\phi^\alpha(t_1)] \phi^\beta(t_2) \right] , \quad (3.54)$$

da, definieren wir

$$\begin{aligned} \phi^\alpha(t_1) &:= \sum_{i=-l}^{\infty} \alpha_i \varepsilon^i \\ \phi^\beta(t_2) &:= \sum_{j=-k}^{\infty} \beta_j \varepsilon^j , \end{aligned} \quad (3.55)$$

gilt:

$$\sum_{\substack{i=-l, j=-k \\ (i+j) < 0}}^{\infty} \alpha_i \beta_j \varepsilon^{(i+j)} \neq \sum_{\substack{i=-l, j=-k \\ (i+j) < 0, i < 0}}^{\infty} \alpha_i \beta_j \varepsilon^{(i+j)} . \quad (3.56)$$

Insbesondere ist somit R_{MS} kein Ringhomomorphismus.

In [3] werden Renormierungsabbildungen durch ihre multiplikativen Eigenschaften definiert. Die Renormierungsabbildungen erfüllen dabei die sogenannten *Multiplikationsbedingung*¹¹ [3].

Wir definieren nun eine Renormierungsabbildung als einen Endomorphismus $R : V \rightarrow V$, der die Multiplikationsbedingungen

$$\begin{aligned} R \left[\prod_{i=1}^r R[x_i] \right] &= \prod_{i=1}^r R[x_i] \\ R \left[\prod_{i=1}^r (x_i) - R[x_i] \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

¹¹ Multiplicativity Constraints

oder gleichbedeutend

$$R[x_i x_j] = R[R[x_i]x_j] + R[x_i R[x_j]] - R[x_i]R[x_j] , \quad (3.58)$$

wobei $x_i, x_j \in V$, erfüllt. Diese Multiplikationsbedingungen sind dabei Grundlage der multiplikativen Renormierung. Dank der Multiplikationsbedingungen für Renormierungsabbildungen gilt

$$Z_R(\phi_a(t_1)\phi_b(t_2)) = Z_R(\phi_a(t_1)) Z_R(\phi_b(t_2)) . \quad (3.59)$$

Durch diese Bedingung erkennt man tiefe mathematische Zusammenhänge zwischen Counterterm, dem renormierten Graphen und der Birkhoffzerlegung im Rahmen des Riemann-Hilbert-Problems, wie sie in [5, 6, 7] diskutiert werden.

Bis jetzt haben wir das *Minimal-Subtraction*-Schema betrachtet.

Eine weitere Methode der Renormierung ist das *On-Shell*-Schema. Hierbei werden äußere Parameter wie Masse und Impulse einem anderen Skalenwert zugeordnet. In der Sprache der Skalen bedeutet dies, daß wir einen Skalenwechsel durchführen. Betrachten wir dazu eine Abbildung

$$\begin{aligned} R_{a,b} : V &\longrightarrow V \\ \phi_a(t) &\longmapsto \phi_b(t) . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Untersuchen wir die Wirkung auf einen primitiven Graphen. Als Beispiel betrachten wir

$$\phi_a(\bullet) := a^{-\varepsilon} B(\varepsilon, 1 - \varepsilon), \quad (3.61)$$

wobei

$$B(\varepsilon, 1 - \varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)\Gamma(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + \zeta(2)\varepsilon + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (3.62)$$

wobei die *Zetafunktion* wie folgt definiert ist

$$\zeta(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad (3.63)$$

denn es gilt

$$\Gamma(1 + \varepsilon) = e^{-\gamma\varepsilon} \exp \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)\varepsilon^n, \quad (3.64)$$

wobei γ die *Eulerzahl* ist.

Benutzen wir nun zur Berechnung des Z -Faktors für einen primitiven Graphen den Skalenwechsel $R_{a,b}$ als Renormierungsabbildung, so erhalten wir für den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\phi_a(\bullet) - \phi_b(\bullet)] &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[B(\varepsilon, 1 - \varepsilon) [a^{-\varepsilon} - b^{-\varepsilon}] \right] & \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} + \zeta(2)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) [1 - \ln(a)\varepsilon - (1 - \ln(b))\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] \right] & \\ = \ln \left(\frac{b}{a} \right) . & \end{aligned} \quad (3.65)$$

Das *On-Shell*-Schema wird im weiteren Verlauf der Arbeit eine zentrale Rolle spielen.

Nachdem wir jetzt die für uns wichtigen Eigenschaften von Renormierungsabbildungen diskutiert haben wollen wir nun versuchen, die Wirkung der Renormierungsabbildungen auf die Stufe der Charaktere von \mathcal{H}_R zu heben.

Wie können wir nun mit Hilfe der Charaktere von \mathcal{H}_R die Zimmermannsche *Forest*-Formel samt Renormierungsabbildung algebraisch darstellen?

Die Antipode der Hopfalgebra \mathcal{H}_R liefert uns schon die Kombinatorik der *Forest*-Formel, also muß die Wirkung der Antipode eine Zentrale Rolle in unserer Formulierung spielen.

Was wir benötigen ist eine Art *Pullback* auf dem Niveau der Charaktere.

Wir definieren dazu eine Abbildung [3]

$$S_R[\phi'_a](t) = -R[\phi'_a(t) + m[(S_R \otimes id)(\phi'_a \otimes \phi'_a)P_2\Delta(t)]] , \quad (3.66)$$

wo $P_2 := (\eta \circ \varepsilon - id) \otimes (\eta \circ \varepsilon - id)$ der Projektionsoperator, wie in [2] definiert, ist. Der Projektor $P := (\eta \circ \varepsilon - id)$ hat dabei die Eigenschaft

$$P(e) = (\eta \circ \varepsilon - id)(e) = 0 \quad (3.67)$$

$$P(t) = (\eta \circ \varepsilon - id)(t) = t, \quad \forall t \in \{t\}, t \neq e . \quad (3.68)$$

Der Ausdruck (3.66) entspricht der Berechnung des Counterterms eines Feynmangraphen mit der *Forest*-Formel (3.14). Dies wollen wir anhand eines Beispiels demonstrieren:

$$\begin{aligned} S_R[\phi] \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) &= -R \left[\phi \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \right] - R \left[m \left((S_R \otimes id)(\phi \otimes \phi) \left(2 \cdot \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \end{array} + \dots \otimes \bullet \right) \right) \right] \\ &= -R \left[\phi \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \right] + R \left[2R \left[\phi \left(\bullet \right) \right] \phi \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \end{array} \right) \right] - R \left[R \left[\phi \left(\bullet \right) \right] R \left[\phi \left(\bullet \right) \right] \phi \left(\bullet \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.69)$$

S_R ist somit eine Übersetzung der *Forest*-Formel auf das Niveau der Charektere von \mathcal{H}_R . Im nächsten Schritt wollen wir nun den Renormierungsvorgang in eine gegeben algebraische Struktur auf dem Raum der Charaktere von \mathcal{H}_R einführen.

Zuvor wollen wir jedoch noch einmal auf das *On-Shell*-Schema zurückkommen und eine universelle Eigenschaft dieses Schemas diskutieren.

In [12] wurde gezeigt, daß zu jedem beliebigen Renormierungsschema eine äquivalente Formulierung als *On-Shell*-Schema mit baumabhängigen Skalenfaktoren dargestellt werden kann.

Im folgenden wollen wir noch einmal kurz referieren, wie man eine solche Äquivalenz zeigen kann. Wie kann man die Wirkung eines beliebigen Renormierungsschemas R für eine gegebene Laurentreihe $\phi_a(t)$ als baumabhängigen Skalenwechsel $R_{a,\bar{a}}$ ausdrücken, wobei \bar{a} eine baumabhängige Skala ist?

Da die Wirkung eines Renormierungsschemas durch seine Bedeutung im Z -Faktor der Renormierung gegeben ist, muß man demnach versuchen, einen allgemeinen Ansatz für einen Z -Faktor zu finden, der durch einen baumabhängigen Skalenwechsel $R_{a,\bar{a}}$ definiert ist, und dann im Z -Faktorvergleich mit dem zu interpretierenden Renormierungsschema die baumabhängigen Skalenfaktoren zu bestimmen. Es muß also gelten:

$$Z_R(\phi_a(t)) = Z_{R_{a,\bar{a}}}(\phi_a(t)) . \quad (3.70)$$

Betrachten wir einen allgemeinen *On-Shell*- Z -Faktor

$$Z_{R_{a,\bar{a}}}(\phi_a(t)) := \sum_{\text{totale Schnitte } C \text{ von } t} (-1)^{n_C} \left[\prod_i B_{t_i} \bar{a}(t_i)^{-\omega(t_i)\varepsilon} \right] B_{t_R} \bar{a}(t_R)^{-\omega(t_R)\varepsilon} , \quad (3.71)$$

wobei die Schreibweisen $t_i \in P^C(t)$, $t_R := R^C(t)$ und

$$B_t := \prod_{v \in t^{[0]}} B_{\omega(v)}(\varepsilon) \quad (3.72)$$

benutzt wurden. Nun gilt es, die Skalenfaktoren $\bar{a}(t)$ für eine allgemeine Renormierungsabbildung R zu bestimmen. Der allgemeine Z -Faktor einer beliebigen Renormierungsabbildung war durch (3.66) gegeben. Durch geschickte Schreibweise erhält man

$$Z_R(\phi_a(t)) := S_R(\phi_a)(t) = \sum_{\text{totale Schnitte } C \text{ von } t} (-1)^{n_C} \left[\prod_i S_R(\phi_a)(t_i) \right] \phi_a(t_R) \quad (3.73)$$

gemäß (3.66), wobei wiederum die Notation $t_i \in P^C(t)$, $t_R := R^C(t)$, wie in [3] definiert, verwendet wurde.

Ein Vergleich der beiden Ausdrücke (3.71, 3.73) liefert

$$\bar{a}(t) = \exp \left[\left(\frac{-1}{\varepsilon t!} \right) \log (B'_t / B_t) \right] , \quad (3.74)$$

wobei noch die Definition der *Baumfakultät*¹² [3]

$$t! := \prod_{v \in t^{[0]}} \#(t_v) , \quad (3.75)$$

wo $\#t_v$ die Anzahl der Vertizes des Baumes $t_v := P^C(t)$ des Schnittes $C = \{\bar{v}\}$ ist, verwendet wurde.

Die dabei benutzte Größe

$$B'_t := \sum_{\text{totale Schnitte } C \text{ von } t} (-1)^{n_C} \left[\prod_i S_R(\phi_a)(t_i) \right] S_R(\phi_a)(t_R) . \quad (3.76)$$

stellt die Beziehung der Skala zu der Wirkung der zu interpretierenden Renormierungsabbildung auf.

Das bedeutet, daß die Wirkung eines beliebigen Renormierungsschemas R , wie zum Beispiel R_{MS} oder R_{BPHZ} , als Skalenwechsel mit baumabhängiger Skala ausgedrückt werden kann.

Dies ist der Grund, warum wir zu Beginn dieses Kapitels die BPHZ-Renormierung nicht diskutiert haben. Somit kann man jedes Renormierungsschema, ob mit oder ohne Regularisierung, als *On-Shell*-Schema mit baumabhängigen Skalen ausdrücken.

Anhand der Renormierungsabbildung $R_{MS} = \langle \cdot \rangle$ wollen wir ein kleines Beispiel diskutieren. Betrachten wir einen Charakter

$$\phi_a = \prod_{v \in t^{[0]}} B_{\omega(v)}(\varepsilon) a^{-\omega(v)\varepsilon} . \quad (3.77)$$

Betrachten wir zwei einfache Beispiele undekorierte Wurzelbäume:

$$\begin{aligned} \phi_a(\bullet) &= a^{-\varepsilon} B_{\omega(\bullet)}(\varepsilon) \\ \phi_a(\blacklozenge) &= a^{-2\varepsilon} (B_{\omega(\bullet)}(\varepsilon))^2 . \end{aligned} \quad (3.78)$$

Für die Z -Faktortermine der ersten Bäumchen erhält man:

$$\begin{aligned} Z_{MS}(\phi_a(\bullet)) &= - \langle B_1 \rangle \\ Z_{MS}(\phi_a(\blacklozenge)) &= - \langle B_2 B_1 \rangle + \langle \langle B_1 \rangle B_1 \rangle . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Im Vergleich dazu die Z -Faktortermine für eine baumabhängige Skala:

$$\begin{aligned} Z_{R_{a,\bar{a}}}(\phi_a(\bullet)) &= -\bar{a}(\bullet)^{-\varepsilon} B_1 \\ Z_{R_{a,\bar{a}}}(\phi_a(\blacklozenge)) &= -\bar{a}(\blacklozenge)^{-2\varepsilon} B_2 B_1 + \bar{a}(\bullet)^{-2\varepsilon} (B_1)^2 . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Aus der jeweils ersten Gleichung folgt

$$\bar{a}(\bullet) = \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \ln \left[\frac{\langle B_1 \rangle}{B_1} \right] \right) \quad (3.81)$$

und aus den zweiten Gleichungen, unter Berücksichtigung des vorherigen Ergebnisses, folgt mit der Beziehung

$$\bar{a}(\bullet)^{-\varepsilon} = \frac{\langle B_1 \rangle}{B_1} . \quad (3.82)$$

¹²Tree Factorial

für die baumabhängige Skala

$$\bar{a}(\mathfrak{!})^{-2\varepsilon} = \frac{+ \langle B_2 B_1 \rangle - \langle \langle B_1 \rangle B_1 \rangle + \frac{\langle B_1 \rangle^2}{B_1^2} (B_1)^2}{B_2 B_1} . \quad (3.83)$$

Daraus folgt:

$$\bar{a}(\mathfrak{!}) = \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{+ \langle B_2 B_1 \rangle - \langle \langle B_1 \rangle B_1 \rangle + \langle B_1 \rangle^2}{B_2 B_1} \right] \right) \quad (3.84)$$

Dieser Ausdruck ist im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ wohldefiniert, da [3]

$$\begin{aligned} \bar{a}(\mathfrak{!}) &= \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{+ \langle B_2 B_1 \rangle - \langle \langle B_1 \rangle B_1 \rangle + \langle B_1 \rangle^2}{B_2 B_1} \right] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln [1 + \mathcal{O}(\varepsilon)] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \mathcal{O}(\varepsilon) \right) . \end{aligned} \quad (3.85)$$

Für eine andere Darstellung

$$\phi_a^2 = \prod_{v \in t^{[0]}} \tilde{B}_{\omega(v)}(\varepsilon) a^{-\omega(v)\varepsilon} \quad (3.86)$$

erhält man dann einen anderen Satz von Skalen $a(t)$, welcher die Polynome \tilde{B}_i enthält.

Schreibweise: Wollen wir die Wirkung von R_{MS} auf eine Laurentreihe $\phi_a^\kappa(t)$ als baumabhängigen Skalenwechsel übersetzen, so bezeichnen wir die dadurch entstandene baumabhängige Skala mit \bar{a}^κ , wobei \bar{a} die Herkunft von der Skala a und der Index κ die Beziehung zu dem individuellen Charakter Φ_a^κ darstellt.

Alles in allem können wir aus dem oben gesagten schließen, daß wir zu jedem Polynom, auf dem ein MS-Renormierungsabbildung gewirkt hat, einen Skalenwechsel $R_{a,\bar{a}}$ finden, so daß

$$R_{a,\bar{a}}[\phi_a(t)] \cong (R_{MS} \circ \phi_a)[t] \quad (3.87)$$

gilt.

Dabei muß man aufpassen, auf welche Polynome der Skalenwechsel wirkt, da die baumabhängigen Skalen wegen (3.76) von den individuellen Polynomen jeder Darstellung abhängen. Also werden verschiedenen Polynomen verschiedene Sätze von Skalen zugeordnet

$$\begin{aligned} R_{a,\bar{a}^1}[\phi_a^1(t)] &\cong (R_{MS} \circ \phi_a^1)[t] \\ R_{a,\bar{a}^2}[\phi_a^2(t)] &\cong (R_{MS} \circ \phi_a^2)[t] . \end{aligned} \quad (3.88)$$

Bezeichnen wir nun mit \tilde{R} das als Skalenwechsel definierte Äquivalent der Renormierungsabbildung R_{MS} ¹³, so gilt

$$\tilde{R}[\phi_a^1(t_1)\phi_a^2(t_2)] \neq \tilde{R}[\phi_a^1(t_1)]\tilde{R}[\phi_a^2(t_2)] \neq \tilde{R}[\tilde{R}[\phi_a^1(t_1)]\phi_a^2(t_2)] \quad (3.89)$$

aufgrund der Eigenschaft (3.58) von R_{MS} .

Wie sehen solche Skalenwechsel im Polynomraum V aus? Wir haben gesehen, daß solche Skalen als Potenzen ihres Logarithmus auftreten. Um einen neuen Satz an Skalen einzuführen, ersetzt man nun die jeweiligen Potenzen der logarithmisierten Skalen durch eine andere Skala.

Dies kann durch einen Differentialoperator

$$R_{a,\bar{a}} := \sum_{t \in \{t\}} \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(\bar{a}(t)))^k \left(\frac{\partial}{\partial \ln(a(t))} \right)_{|a(t)=1}^k \quad (3.90)$$

¹³Natürlich variiert \tilde{R} von Polynom zu Polynom. Dies soll eine allgemeine Schreibweise für die Klasse solcher Abbildungen sein. Wir werden den Skalenwechsel \tilde{R} zu einem späteren Zeitpunkt genau diskutieren.

ausgedrückt werden.

Bei diesem Differential wird über Funktionen von $\{t\}$ differenziert und summiert. Sei D ein allgemeiner Differentialoperator, der nach einer baumabhängigen Funktion differenziert, so bezeichnen wir den Differentialoperator

$$\mathcal{D}^t := \sum_{t \in \{t\}} \mathcal{D} \quad (3.91)$$

als *Baumableitung* des Differentialoperators \mathcal{D} .

Definieren wir den Differentialoperator

$$\mathcal{D}_{a,\bar{a}} := \sum_{k=0}^{\infty} (\ln(\bar{a}(t)))^k \left(\frac{\partial}{\partial \ln(a(t))} \right)_{|a(t)=1}^k \quad (3.92)$$

so gilt

$$R_{a,\bar{a}} := \mathcal{D}_{a,\bar{a}}^t . \quad (3.93)$$

Einige Bemerkungen zur Invertierbarkeit von Renormierungsabbildungen und Skalenwechseln:

Renormierungsabbildungen sind im allgemeinen nicht invertierbar. Zum Beispiel besitzt R_{MS} als Projektionsoperator auf den Polteil einer Laurentreihe keine eindeutige Inverse. Anders verhält es sich bei den Skalenwechseln: Der Differentialoperator (3.92) ist natürlich durch das Vertauschen der in ihm auftretenden Skalen eindeutig invertierbar. Allerdings können wir bei der Invertierbarkeit von R_{MS} einen kleinen Trick anwenden: Da wir uns für die Wirkung von R_{MS} bei der Berechnung der Z -Faktoren interessieren und nicht für die Eigenschaft von R_{MS} als Projektion, betrachten wir einfach den mit R_{MS} korrespondierenden Skalenwechsel \tilde{R} . \tilde{R} ist als Skalenwechsel eine invertierbare Abbildung.

Vorsicht: Das bedeutet nicht, daß wir den Projektionsoperator durch einen wie auch immer gearbeteten Trick invertieren, was nicht möglich wäre. Wir invertieren einen Skalenwechsel, der, darstellungsspezifisch, den selben Counterterm hervorruft wie R_{MS} .

Wir wollen dies an einem einfachen aber übersichtlichen Beispiel, an dem wir den zugehörigen Skalenwechsel explizit angeben können, verdeutlichen. Wir nehmen die Darstellung ϕ_a^2 aus Beispiel (3.43). Bei diesem Beispiel gilt gerade:

$$R_{MS}(\phi_a^w(t)) = \langle \phi_a^2(t) \rangle \cong R_{a,1}(\phi_a^2(t)) . \quad (3.94)$$

Das ist nicht verwunderlich, besitzen im Fall der Darstellung ϕ_a^2 die Polynome B_t aus Gleichung (3.72) keinen Anteil $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$. Daher gilt im Fall ϕ_a^2 : $\tilde{R} = R_{a,1}$, wobei $R_{a,1}$ invertierbar ist.

Wir wollen nun noch ein zweites Beispiel mit baumabhängigen Skalen geben. Betrachten wir den Charakter ϕ_a^1 aus Beispiel (3.72). Es gilt demnach

$$\phi_a^1(t) := \prod_{v \in t[0]} a(t)^{-\omega(v)\varepsilon} B(\omega(v)\varepsilon, 1 - \omega(v)\varepsilon) \quad (3.95)$$

und somit

$$B_t := \prod_{v \in t[0]} B(\omega(v)\varepsilon, 1 - \omega(v)\varepsilon) . \quad (3.96)$$

Für den Z_{MS} -Faktor gilt deshalb:

$$Z_{MS}(\phi_a^1(t)) = S_{R_{MS}}(\phi_a^1(t)) = \sum_{\text{totale Schnitte } C \text{ von } t} (-1)^{n_C} \langle \prod_i \langle B_{t_i} \rangle \rangle B_{t_R} . \quad (3.97)$$

Aus (3.82) können wir nun die erste Baumabhängige Skala berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{a}^1(\bullet) &= \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \ln \left[\frac{\langle B(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \rangle}{B(\varepsilon, 1 - \varepsilon)} \right] \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \ln \left[\frac{1}{B(\varepsilon, 1 - \varepsilon)} \right] \right) . \end{aligned} \quad (3.98)$$

Mit der Relation

$$B(n\varepsilon, 1 - n\varepsilon) = \frac{\pi}{\sin(\pi n\varepsilon)} \quad (3.99)$$

folgt

$$\bar{a}^1(\bullet) = \pi^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (3.100)$$

was ein wohldefinierter Ausdruck ist, da

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\pi^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right] = 1. \quad (3.101)$$

Für das folgende Beispiel definieren wir der Übersichtlichkeit halber

$$B_n := B(n\varepsilon, 1 - n\varepsilon). \quad (3.102)$$

Nach (3.84) berechnen wir nun die Skala

$$\begin{aligned} \bar{a}^1(\mathfrak{!}) &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{\langle B_2 B_1 \rangle + \langle\langle B_1 \rangle B_1 \rangle - (\langle B_1 \rangle)^2}{B_2 B_1} \right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}}{B_2 B_1} \right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{1}{B_2 B_1} \right]\right). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\bar{a}^1(\mathfrak{!}) = 2^{\frac{1}{2\varepsilon}} \pi^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\sin(\pi\varepsilon) \sin(2\pi\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2\varepsilon}}, \quad (3.103)$$

wobei wiederum gilt, daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2^{\frac{1}{2\varepsilon}} \pi^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\sin(\pi\varepsilon) \sin(2\pi\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] = 1. \quad (3.104)$$

Wir können sehen, daß die Bedingung (3.85) erfüllt ist, da

$$\begin{aligned} \bar{a}^1(\mathfrak{!}) &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{1}{B_2 B_1} \right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln \left[\frac{1}{\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{6}\zeta(2) + \mathcal{O}(\varepsilon)} \right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \ln(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \mathcal{O}(\varepsilon)\right). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Die anderen Baumabhängigkeiten berechnen sich weiter gemäß (3.74).

Somit haben wir den zu ϕ_a^1 gehörigen Skalenwechsel $\tilde{R} = R_{a, \bar{a}^1}$ bestimmt. R_{a, \bar{a}^1} ist als Skalenwechsel eine invertierbare Abbildung.

Anhand der Beispiele haben wir gesehen, wie wir das *MS*-Renormierungsschema, dessen Renormierungsabbildungen nicht invertierbar sind, in einem für die Renormierung äquivalenten *On-Shell*-Schema mit invertierbaren Skalenwechseln ausdrücken können. Diese Skalenwechsel sind von

Polynom zu Polynom unterschiedlich und müssen daher individuell berechnet werden.

In unseren weiteren Betrachtungen setzen wir somit R_{MS} mit einem (im Sinne der Renormierung) äquivalenten Skalenwechsel \tilde{R} gleich, wobei \tilde{R} als Skalenwechsel invertierbar ist.

In diesem Kapitel heben wir die wichtigsten Eigenschaften von Renormierungsabbildungen diskutiert und gezeigt, wie man die *Forest Formula* mithilfe der Charaktere von \mathcal{H}_R und der Hopfalgebra selbst darstellen kann.

Das nächste Kapitel ist nun dem Thema *Renormierung* gewidmet. Wir werden eine algebraische Struktur definieren, die es erlaubt, zu jeder divergenten Darstellung die renormierte Funktion anzugeben.

3.6 Die Gruppe G_R

In den letzten Kapiteln haben wir gesehen, wie wir mit Hilfe der Charaktere von \mathcal{H}_R jeden nicht-trivialen Wurzelbaum t auf eine im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ divergente Laurentreihe $\phi(t)$ abbilden können, wo ε die Indeterminante der Laurentreihe ist. Die Aufgabe von Renormierung ist es nun, der Laurentreihe $\phi(t)$ eine wohldefinierte und im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergente Reihe zuzuordnen. In diesem Kapitel wollen wir diskutieren, wie der Renormierungsvorgang einer in ε divergenten Laurentreihe $\phi(t)$ durch eine Gruppenstruktur auf dem Raum der Charaktere von \mathcal{H}_R ausgedrückt werden kann. Diese Struktur wurde bereits in [4] eingeführt. Im ersten Teil dieses Kapitels soll noch einmal kurz die Gruppenstruktur und damit die Bedeutung des Faltungsproduktes definiert werden. Dann wird der Zusammenhang zwischen Faltung und Renormierung diskutiert, was unter anderem zu Renormierungsgruppengleichungen führen wird. Beginnen wir mit der Gruppenstruktur auf dem Raum der Charaktere von \mathcal{H}_R , den wir im weiteren Verlauf der Arbeit als $\mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R)$ bezeichnen. Betrachten wir zwei Charaktere ϕ^1, ϕ^2 . Da der Darstellungsraum eine Algebrenstruktur trägt, deren Multiplikation wir mit M bezeichnen, können wir ein Produkt

$$* : \mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R) \otimes \mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R) \longrightarrow \mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R) \quad (3.106)$$

wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \phi^1 * \phi^2(t) &= M \circ (\phi^1 \otimes \phi^2) \circ \Delta(t) \\ &= \phi^1(t')\phi^2(t'') . \end{aligned} \quad (3.107)$$

Dieses Produkt entspricht dem Faltungsprodukt auf dem Raum der Endomorphismen einer Hopfalgebra. Dieses Faltungsprodukt definiert die Eigenschaft der Antipode S einer Hopfalgebra H als inverses Element der Abbildung $\text{id} \in \text{End}(H)$ bezüglich dieses Faltungsproduktes. Im Bezug auf Renormierungstheorie wird dem Faltungsprodukt nun eine weitere wichtige Eigenschaft zukommen. Soweit würde man mit jeder beliebigen Koalgebra ein solches Faltungsprodukt (3.108) definieren können. Die Hopfalgebrenstruktur definiert uns jedoch eine Gruppenstruktur auf $\mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R)$. Das Einselement der Multiplikation ist durch den Pullback der Koeins gegeben. So bilden die Elemente

$$\phi \circ \varepsilon : \mathcal{H}_R \longrightarrow V \quad (3.108)$$

eine Eins bezüglich des Sternprodukts

$$[\phi \circ \varepsilon](t) = \mathbf{1}(\varepsilon(t)) = \varepsilon(t) , \quad (3.109)$$

da die Eins von V gerade die Eins aus \mathbf{Q}^* ist. Klar: Jeder Charakter ϕ erfüllt als Algebrenhomomorphismus die Eigenschaft $\phi(1) = \mathbf{1}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} [[\phi^1 \circ \varepsilon] * \phi^2](t) &= \phi^1(\varepsilon(t'))\phi^2(t'') \\ &= \phi^2(\varepsilon(t')t'') \\ &= \phi^2(t) , \end{aligned} \quad (3.110)$$

was beweist, daß $\phi^1 \circ \varepsilon$ eine links-Eins bezüglich der $*$ -Multiplikation ist. Der Beweis für die Eigenschaft als rechts-Eins verläuft analog.

Das letzte zu bestimmende Element unserer Gruppenstruktur ist die Inverse, welche durch den Pullback der Antipode gegeben ist:

$$\phi^{-1} := \phi \circ S , \quad (3.111)$$

denn die Antipode S war ja gerade als *Inverse* der Identitätsabbildung in $\text{End}(\mathcal{H}_R)$ bezüglich des dort gegebenen Faltungsproduktes definiert.

Deshalb verwundert es nicht, daß der Pullback von S ein inverses Element bezüglich der Multiplikation in G_R liefert, da

$$[[\phi \circ S] * \phi](t) = \phi(S(t'))\phi(t'') \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} &= \phi(S(t')t'') \\ &= \phi(\varepsilon(t)) . \end{aligned} \quad (3.113)$$

Der Beweis der Rechtsinversen verläuft analog. Die Assoziativität ist ebenfalls trivial, weil das Sternprodukt eine Komposition assoziativer Abbildungen ist. In der Literatur [4] wird die Gruppe $(\text{CHAR}(\mathcal{H}_R), *)$ mit G_R bezeichnet, wobei die Elemente als $g \in G_R$ notiert werden. Im folgenden werden wir uns dieser Notation anschließen.

Was hat diese Gruppe mit der Renormierung UV-divergenter Integrale zu tun?

Zuerst einmal ist die Definition der Gruppenstruktur mit Hilfe der Strukturabbildungen von \mathcal{H}_R definiert, die die Kombinatorik der Forest Formula beinhalten. Zweitens kann man mithilfe der Charaktere die Wirkung der Renormierungsabbildung ins Spiel bringen.

Die Struktur, die die Antipode der Hopfalgebra benutzt, ist die Invertierung (3.113). Die invertierte Darstellung g^{-1} einer "divergenten Darstellung" g enthält also die Information für den Counterterm der Darstellung g .

Betrachten wir folgende Abbildung:

$$[g^{-1} * g](t) = g(\varepsilon(t)) , \quad (3.114)$$

was nach (3.113) gilt.

Wie kann man nun diese Gleichung im Sinne von Renormierung interpretieren?

Betrachten wir die Definition von ε in (3.16), so sehen wir, daß alle nichttrivialen Bäume durch diese Abbildung auf die Null projiziert werden. Das bedeutet, daß $g^{-1} * g$ jedem nichttrivialen Baum den endlichen Wert 0 zuordnet. Dies ist eine Renormierung, denn der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ von $g(t)$ war, außer für den trivialen Fall, divergent! Natürlich ist diese Renormierung von geringem physikalischen Interesse, da alle Integrale somit den Wert 0 liefern, was keine physikalisch sinnvolle Aussage ist. Jedoch gibt diese Konstruktion Hoffnung, daß man durch eine kleine Veränderung von $g^{-1} * g$ die für die Physik wesentliche Renormierung erhält. Wir gehen dabei wie folgt vor: Wir ersetzen die Inverse g^{-1} durch die Inverse eines anderen Elementes g_R^{-1} , für das gilt:

$$g_R(t) = R(g(t)) \quad (3.115)$$

für eine beliebige Renormierungsabbildung R .

Wir wollen diese Abbildung anhand kleiner Beispiele untersuchen. Sei $g = \phi_a$ und $g_R = \phi_1$, so daß die Renormierungsabbildung gerade der Skalenwechsel $R_{a,1}$ ist. Wir definieren ferner

$$B_1 := B(\varepsilon, 1 - \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \zeta(2)\varepsilon + \frac{7}{10}\zeta(2)^2\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) \quad (3.116)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi^2\varepsilon}{6} + \frac{7\pi^4\varepsilon^3}{360} + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

$$B_2 := B(2\varepsilon, 1 - 2\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} + \zeta(2)2\varepsilon + \frac{7}{5}\zeta(2)^22\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{\pi^2\varepsilon}{3} + \frac{7\pi^4\varepsilon^3}{45} + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

$$B_3 := B(3\varepsilon, 1 - 3\varepsilon) = \frac{1}{3\varepsilon} + 3\zeta(2)\varepsilon + \frac{63}{10}\zeta(2)^23\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

$$= \frac{1}{3\varepsilon} + \frac{\pi^2\varepsilon}{2} + \frac{21\pi^4\varepsilon^3}{40} + \mathcal{O}(\varepsilon^5) ,$$

wobei die Reihenentwicklung der Betafunktion schon in (3.62) angegeben war und wir die Relation

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad (3.117)$$

verwendet haben.

Für die nun folgenden Beispiele benötigen wir noch die Reihenentwicklung

$$c^{-n\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n \ln(c))^k}{k!} . \quad (3.118)$$

Nun wollen wir sehen, ob unser Produkt $g_R^{-1}g$ zweier Charaktere von \mathcal{H}_R die gewünschten renormierten Ausdrücke liefert.

Betrachten wir das erste Beispiel:

$$\begin{aligned} [g_R^{-1} * g](\mathbf{1}) &:= M \circ [\phi_1 \otimes \phi_a] \circ [S \otimes \text{id}] \left(\Delta(\mathbf{1}) \right) \\ &= M \circ [\phi_1 \otimes \phi_a] \circ [S \otimes \text{id}] \left(\mathbf{1} \otimes e + e \otimes \mathbf{1} + \bullet \otimes \bullet \right) \\ &= \phi_1 \left(S(\mathbf{1}) \right) + \phi_a(\mathbf{1}) + \phi_1(s(\bullet)) \phi_a(\bullet) \\ &= [a^{-2\varepsilon} - 1] B_2 B_1 + [1 - a^{-\varepsilon}] (B_1)^2 \\ &= [-2\varepsilon \ln(a) + 4\varepsilon^2 (\ln(a))^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)] \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{3}{2} \zeta(2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ &\quad + [\varepsilon \ln(a) - \varepsilon^2 (\ln(a))^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)] \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + 2\zeta(2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) \\ &= \left(-\frac{\ln(a)}{\varepsilon} + 2(\ln(a))^2 \right) + \left(\frac{\ln(a)}{\varepsilon} - (\ln(a))^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= (\ln(a))^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) , \end{aligned} \quad (3.119)$$

woraus folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ([g_R^{-1} * g](\mathbf{1})) = (\ln(a))^2 < \infty . \quad (3.120)$$

Also liefert $[g_R^{-1} * g](\mathbf{1})$ den richtigen renormierten Ausdruck für die Renormierungsabbildung $R_{a,1}$. Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel:

$$\begin{aligned} [g_b^{-1} * g_a] \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \\ &= M \circ [\phi_b \otimes \phi_a] \circ [S \otimes \text{id}] \Delta \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \\ &= M \circ [\phi_b \otimes \phi_a] \circ [S \otimes \text{id}] \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \otimes e + e \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \bullet \otimes \mathbf{1} + \dots \otimes \bullet \right) \\ &= M \circ [\phi_b \otimes \phi_a] \left(- \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \otimes e + e \otimes \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \bullet \otimes \mathbf{1} \otimes e - \bullet \bullet \bullet \otimes e - 2 \bullet \otimes \mathbf{1} + \dots \otimes \bullet \right) \\ &= (B_1)^2 B_3 [a^{-3\varepsilon} - b^{-3\varepsilon}] + (B_1)^2 B_2 [2b^{-3\varepsilon} - 2b^{-\varepsilon} a^{-2\varepsilon}] + (B_1)^3 [b^{-2\varepsilon} a^{-\varepsilon} - b^{-3\varepsilon}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{-\ln(a) + \ln(b)}{\varepsilon^2} + \frac{3(\ln(a)^2 - \ln(b)^2)}{2\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6}(-11\pi^2 \ln(a) - 9\ln(a)^3 + 11\pi^2 \ln(b) + 9\ln(b)^3) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&\quad + \left[\frac{2(\ln(a) - \ln(b))}{\varepsilon^2} - \frac{2(\ln(a)^2 + \ln(a)\ln(b) - 2\ln(b)^2)}{\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3}(\ln(a) - \ln(b))(6\pi^2 + 4\ln(a)^2 + 10\ln(a)\ln(b) + 13\ln(b)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&\quad + \left[\frac{-\ln(a) + \ln(b)}{\varepsilon^2} + \frac{\ln(a)^2 + 4\ln(a)\ln(b) - 5\ln(b)^2}{2\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6}(\ln(a) - \ln(b))(3\pi^2 + \ln(a)^2 + 7\ln(a)\ln(b) + 19\ln(b)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&= -\frac{1}{3} \left(\pi^2 + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) ,
\end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[[g_b^{-1} * g_a] \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \right) \right] = -\frac{1}{3} \left(\pi^2 + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 \right) \ln\left(\frac{a}{b}\right) . \quad (3.121)$$

Nun noch zwei Beispiele für einen Wurzelbaum der Tiefe 3:

$$\begin{aligned}
&[g_1^{-1} * g_a] \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \quad (3.122) \\
&= M \circ [\phi_1 \otimes \phi_a] \circ [S \otimes \text{id}] \Delta \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \\
&= M \circ [\phi_1 \otimes \phi_a] \circ [S \otimes \text{id}] \left(\begin{array}{c} \vdots \otimes e + e \otimes \vdots + \vdots \otimes \bullet + \bullet \otimes \vdots \end{array} \right) \\
&= M \circ [\phi_1 \otimes \phi_a] \left(-\vdots \otimes e + e \otimes \vdots + 2 \bullet \otimes e - \bullet \bullet \bullet \otimes e - \vdots \otimes \bullet - \bullet \bullet \bullet \otimes \bullet - \bullet \bullet \bullet \otimes \vdots \right) \\
&= [a^{-3\varepsilon} - 1]B_3B_2B_1 + [2 - a^{-2\varepsilon} - a^{-\varepsilon}]B_2(B_1)^2 + [a^{-\varepsilon} - 1](B_1)^3 \\
&= \left[-\frac{\ln(a)}{2\varepsilon^2} + \frac{3\ln(a)^2}{4\varepsilon} - \frac{7}{6}\pi^2 \ln(a) - \frac{3\ln(a)^3}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&\quad + \left[\frac{3\ln(a)}{2\varepsilon^2} - \frac{5\ln(a)^2}{4\varepsilon} + \frac{3}{4}(2\pi^2 \ln(a) + \ln(a)^3) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&\quad \left[-\frac{\ln(a)}{2\varepsilon^2} + \frac{\ln(a)^2}{2\varepsilon} - \frac{1}{6}\ln(a)(3\pi^2 + \ln(a)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&= -\frac{1}{6}\ln(a)(\pi^2 + \ln(a)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon) ,
\end{aligned}$$

womit wir wieder ein renormiertes Ergebnis erhalten:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[[g_1^{-1} * g_a] \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \right] = -\frac{1}{6}\ln(a)(\pi^2 + \ln(a)^2) . \quad (3.123)$$

Ein weiterer Wurzelbaum der Tiefe 3:

$$\begin{aligned}
& [g_a^{-1} * g_c] \left(\begin{array}{c} \text{!} \\ \text{!} \end{array} \right) \tag{3.124} \\
&= M \circ [\phi_a \otimes \phi_c] \circ [S \otimes \text{id}] \Delta \left(\begin{array}{c} \text{!} \\ \text{!} \end{array} \right) \\
&= M \circ [\phi_a \otimes \phi_c] \circ [S \otimes \text{id}] \left(\begin{array}{c} \text{!} \otimes e + e \otimes \text{!} + \begin{array}{c} \text{!} \\ \text{!} \end{array} \otimes \bullet + 2 \bullet \otimes \text{!} + \dots \otimes \text{!} \end{array} \right) \\
&= M \circ [\phi_a \otimes \phi_c] \left(e \otimes \text{!} - \text{!} \otimes e + \begin{array}{c} \text{!} \\ \text{!} \end{array} \otimes e - 2 \bullet \otimes \bullet \otimes e + \dots \otimes e \right. \\
&\quad \left. + 2 \bullet \otimes \bullet \otimes e - \dots \otimes e - \begin{array}{c} \text{!} \\ \text{!} \end{array} \otimes \bullet + 2 \bullet \otimes \bullet - \dots \otimes \bullet - 2 \bullet \otimes \text{!} + \dots \otimes \text{!} \right) \\
&= [c^{-4\epsilon} - a^{-4\epsilon}] (B_1)^2 B_3 B_4 + [a^{-4\epsilon} - a^{-3\epsilon} c^{-\epsilon}] (B_1)^3 B_3 \\
&\quad + [a^{-2\epsilon} c^{-2\epsilon} + 2a^{-3\epsilon} c^{-\epsilon} - 3a^{-4\epsilon}] (B_1)^3 B_2 + [2a^{-4\epsilon} - 2a^{-\epsilon} c^{-3\epsilon}] (B_1)^2 B_2 B_3 \\
&\quad + [a^{-4\epsilon} - a^{-3\epsilon} c^{-\epsilon}] (B_1)^4 \\
&= \left[\frac{\ln(a) - \ln(c)}{3\epsilon^3} - \frac{2(\ln(a)^2 - \ln(c)^2)}{3\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{27\pi^2 \ln(a) + 16 \ln(a)^3 - 27\pi^2 \ln(c) - 16 \ln(c)^3}{18\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{9} (\ln(a)^2 - \ln(c)^2) (27\pi^2 + 8(\ln(a)^2 + 8 \ln(c)^2)) \right] \\
&\quad + \left[-\frac{\ln(a) - \ln(c)}{3\epsilon} + \frac{7 \ln(a)^2 - 6 \ln(a) \ln(c) - \ln(c)^2}{6\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\ln(a) - \ln(c)) (12\pi^2 + 37 \ln(a)^2 + 10 \ln(a) \ln(c) + \ln(c)^2)}{18\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{72} (\ln(a) - \ln(c)) (7 \ln(a) + \ln(c)) (24\pi^2 + 25 \ln(a)^2 + 6 \ln(a) \ln(c) + \ln(c)^2) \right] \\
&\quad + \left[\frac{2(\ln(a) - \ln(c))}{\epsilon^3} - \frac{13 \ln(a)^2 - 10 \ln(a) \ln(c) - 3 \ln(c)^2}{2\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\ln(a) - \ln(c)) (14\pi^2 + 65 \ln(a)^2 + 26 \ln(a) \ln(c) + 5 \ln(c)^2)}{6\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} (\ln(a) - \ln(c)) (295 \ln(a)^3 + 42\pi^2 \ln(c) + 155 \ln(a)^2 \ln(c) \right. \\
&\quad \left. + 9 \ln(c)^3 + \ln(a) (182\pi^2 + 53 \ln(c)^2)) \right] \\
&\quad + \left[-\frac{\ln(a) - \ln(c)}{3\epsilon} + \frac{5 \ln(a)^2 - 2 \ln(a) \ln(c) - 3 \ln(c)^2}{2\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\ln(a) - \ln(c)) (5\pi^2 + 7 \ln(a)^2 + 6 \ln(a) \ln(c) + 3 \ln(c)^2)}{2\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24} (5 \ln(a)^2 - 2 \ln(a) \ln(c) - 3 \ln(c)^2) \right. \\
&\quad \left. (30\pi^2 + 17 \ln(a)^2 + 6 \ln(a) \ln(c) + 9 \ln(c)^2) \right] \\
&\quad + \left[-\frac{\ln(a) - \ln(c)}{3\epsilon} + \frac{(\ln(a) - \ln(c)) (7 \ln(a) + \ln(c))}{6\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\ln(a) - \ln(c)) (4\pi^2 + 37 \ln(a)^2 + 10 \ln(a) \ln(c) + \ln(c)^2)}{6\epsilon} + \frac{1}{24} (\ln(a) - \ln(c)) \right. \\
&\quad \left. (7 \ln(a) + \ln(c)) (8\pi^2 + 25 \ln(a)^2 + 6 \ln(a) \ln(c) + \ln(c)^2) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) ,
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$\frac{1}{12} \left(4\pi^2 + \left(\ln \left(\frac{a}{c} \right) \right)^2 \right) \left(\ln \left(\frac{a}{c} \right) \right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) . \quad (3.125)$$

Wie wir sehen, liefert dieses Beispiel wiederum ein renormiertes Ergebnis.

Um Renormierung bezüglich der Gruppe G_R kompakt zu formulieren, führen wir die Schreibweise

$$\Gamma_{a,b} = g_a^{-1} * g_b \quad (3.126)$$

ein, wobei wir $g_a = R_{b,a}[g_b]$ definiert haben.

Ein wichtiger Zusammenhang wird erkennbar wenn man untersucht, wie zwei Renormierungen $\Gamma_{b,a}$ und $\Gamma_{c,a}$ algebraisch korreliert sind. In [3] wurde gezeigt, daß der Zusammenhang durch eine Faltung

$$\Gamma_{c,a} = \Gamma_{c,b} * \Gamma_{b,a} \quad (3.127)$$

gegeben ist. Diese Gleichung kann man wie folgt interpretieren: Hat man eine Darstellung g , die mit einem Satz an Skalen b definiert ist, und eine Renormierungsabbildung $R : \phi \longrightarrow R(\phi) = \phi'$, wobei ϕ' durch einen zweiten Satz von Parametern b' definiert ist, und stellt den Schemenwechsel

$$\Gamma_{R',\phi} = \Gamma_{R',\phi'} * \Gamma_{R,\phi} \quad (3.128)$$

auf, so kann man zum Beispiel nach dem Satz b von Skalen differenzieren und erhält

$$0 = \frac{d}{db} [\Gamma_{R',\phi'} * \Gamma_{R,\phi}] = \left(\frac{\partial}{\partial b} \Gamma_{R',\phi'} \right) * \Gamma_{R,\phi} + \Gamma_{R',\phi'} * \left(\frac{\partial}{\partial b} \Gamma_{R,\phi} \right) , \quad (3.129)$$

was einer Renormierungsgruppengleichung entspricht.

Wie wir in diesem Kapitel gezeigt haben, beinhaltet die Gruppe G_R die wichtigsten Aspekte der Renormierungstheorie. Einerseits ist es möglich, eine Abbildung zu definieren, die Renormierung als eine Art *Quasi-Eins*, also das Verhältnis zweier Gruppenelemente, dargestellt wird. Andererseits können renormierte Reihen eines Renormierungsschemas aus dem Faltungsprodukt zweier anderer Renormierungen berechnet werden, was zu einer Renormierungsgruppengleichung ausgebaut werden kann.

Wir haben somit eine algebraische Formulierung von pQFT gefunden, die Renormierung als natürliche Struktur enthält. Diese algebraische Formulierung gibt zu tiefergehenden algebraischen und geometrischen Vergleichen anlaß, aus deren Sicht man Counterterme und die renormierten Greensfunktionen anhand der Birkhof-Zerlegung im Rahmen des Riemann-Hilbert-Problems interpretieren kann [5, 6, 7].

3.7 Kurze Zusammenfassung

Ziel dieses Abschnittes ist eine algebraische Formulierung von Renormierung störungstheoretischer Quantenfeldtheorien zu finden, deren zugrundeliegende Menge "Übersetzungen" von Feynmangraphen sind, welche die iterative Struktur von Renormierung als kanonische Struktur beinhaltet.

Zuerst stellt sich die Frage, welche Eigenschaft von Feynmangraphen wichtig für ihre Renormierung ist. Um ein divergentes Integral "endlich" zu machen, addiert man sogenannte Abzugsterme, die gemäß der Zimmermannschen *Forest*-Formel berechnet werden. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Nach und nach werden divergente Subgraphen aus dem Graphen herausgetrennt, welche dann, nachdem sie der Wirkung einer Renormierungsabbildung unterlagen, wieder mit dem übriggebliebenen "Hauptgraphen" multipliziert werden, natürlich alles mit einem negativen Vorzeichen versehen. Die nichttriviale Struktur dieses iterativen Prozesses liegt in dem Heraustrennen der divergenten Subgraphen. Dies soll algebraisch beschrieben werden. Die für diesen Vorgang relevanten "Daten" liegen in der verschachtelten Struktur der Subdivergenzen eines Graphen versteckt. Die

Frage ist nun, wie man diese Daten algebraisch nutzbar machen, dekodieren, kann.

Die Antwort ist durch die sogenannten Wurzelbäume gegeben. Ausgehend von diesen Elementen kann eine Hopfalgebra \mathcal{H}_R definiert werden, deren Komultiplikation das Aufsplitten der Verschachtelung von Subdivergenzen eines Baumes beschreibt, und deren Antipode die iterative Form der Berechnung der Abzugsterme gemäß der *Forest*-Formel darstellt. Somit ist die Forest Formula als Strukturabbildung in kanonischer Weise in eine algebraische Struktur, nämlich die einer Hopfalgebra \mathcal{H}_R , einbettet. Das Auftreten der Wurzelbäume als Generatoren der Hopfalgebra \mathcal{H}_R ist äquivalent zu der Tatsache, daß die *Forests*, die der Definition der *Forest*-Formel als Grundlage dienen (3.6), sich nicht überlappen dürfen.

Das weitere Vorgehen war geprägt durch die Suche nach einer Beschreibung der Wirkung von Renormierungsabbildungen zur Berechnung der Abzugsterme. Letztendlich ergab sich die Wirkung der Renormierungsabbildung als ein Problem der Darstellungen der Hopfalgebra. Durch Darstellungen von \mathcal{H}_R auf einen Ring von Laurentreihen im Regularisierungsparameter ε , dimensionale Regularisierung, und von Logarithmen externer Parameter, Skalen, konnte die Wirkung der Renormierungsabbildungen algebraisch in den Kontext der Hopfalgebra \mathcal{H}_R integriert werden. Mehr noch: die Hopfalgebrenstruktur definiert auf den Darstellungen, Charaktere genannt, eine Gruppenstruktur, die Renormierung als Verhältnis zweier Gruppenelemente, beziehungsweise dem Verhältnis ihrer Darstellungen, liefert. Bedingung ist dabei, daß sich die Charaktere, von denen man das Verhältnis bildet, in ihren dargestellten Laurentreihen um die Wirkung einer Renormierungsabbildungen unterscheiden.

Weiterhin wurde gezeigt, daß sich jedes Renormierungsschema durch einen Satz an Skalen charakterisieren läßt, wobei der renormierte Ausdruck nach Rückgängigmachen der Regularisierung Verhältnisse von Potenzen der logarithmisierten Skalen enthält. Weiterhin kann eine Renormierungsgruppengleichung aus der Betrachtung eines Renormierungsschemenwechsels heraus entwickelt werden. Somit enthält die Hopfalgebra \mathcal{H}_R und die dazugehörige Gruppe G_R alle für die Renormierung wichtigen Eigenschaften und ist somit eine vollständige Beschreibung von Renormierung störungstheoretischer Quantenfeldtheorien. Dabei ist Renormierung von Anfang an kanonisch in dieser Theorie enthalten und muß nicht mehr, wie früher üblich, "per Hand" in die Theorie eingeführt werden.

Mit anderen Worten: Berechnet man Feynmangraphen in störungstheoretischen Quantenfeldtheorien, so ist Renormierung per Struktur automatisch vorgegeben.

In dem nächsten Abschnitt soll eine Klassifikation der Charaktere und deren Renormierungsabbildungen beziehungsweise Skalenwechsel erfolgen. Dies wird mithilfe einer Kategorifizierung unter Berücksichtigung der "asymmetrischen Struktur" von $\Gamma_{a,b}$ geschehen. Diese Asymmetrie wird Anlaß zur Definition von Assoziatoren und Koassoziatoren geben, deren Kohärenzen wir beweisen werden.

3.8 Literaturangabe zu diesem Kapitel

Die Literatur zu diesem Kapitel bezieht sich im großen und ganzen auf Arbeiten von Kreimer und Connes.

Eine gute Einführung in Renormierung und dimensionale Regularisierung findet man in [27].

Die Hopfalgebra der pQFT wurde erstmals in [2] eingeführt, allerdings bezog sich diese Hopfalgebra nicht auf Wurzelbäume sondern auf geklammerte Wörter, wobei die Strukturabbildungen ihrerseits schon Renormierungsabbildungen implementiert hatten.

Die Idee der Wurzelbäume wurde erstmals in [1] veröffentlicht. Hier findet man auch einen Isomorphismus zur Hopfalgebra von Connes und Moscovici.

Die Charaktere wurden in [3] eingeführt, wobei hier eine Formulierung von Renormierung unter Benutzung von *Iterierten Integralen* gegeben wird.

Die Gruppe G_R fand erstmals in der Veröffentlichung [4] ihren Einzug. Sie wird hier jedoch nur kurz erwähnt.

Zu Renormierungsabbildungen und Skalenwechsel wird man in [12] fündig. Hier wird auch eine explizite Rechnung unter Verwendung von Formfaktoren, also matrixwertigen Gleichungen, gegeben.

Eine genauere Diskussion der Multiplikativitätsbedingungen von Renormierungsabbildungen, sowie des Zusammenhangs zwischen Renormierung und dem Riemann-Hilbert-Problem, findet in [5, 6, 7] statt.

Kapitel 4

Renormierung und die Hopfkatgorie Φ

In diesem Kapitel untersuchen wir Renormierung, durch \mathcal{H}_R (3.2) und G_R (3.6) algebraisch beschrieben, aus Sicht von Kategorientheorie.

Warum suchen wir eine kategorientheoretische Beschreibung von Renormierung?

Dazu gibt es im wesentlichen zwei Motivationen: Einerseits erlaubt uns eine Formulierung als Kategorie eine Klassifikation der betrachteten Theorie. Wie wir in Kapitel 2.1 schon diskutiert haben, sind die Objekte einer Kategorie gerade die zugrundeliegenden mathematischen Elemente der Theorie, aus deren Blickwinkel heraus wir die Kategorie definieren. Die Morphismen ermöglichen einen Vergleich dieser Objekte. Eine Formulierung von Renormierung in Form einer Kategorie, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit mit Φ bezeichnen werden, "sortiert" dabei die Charaktere der Hopfalgebra \mathcal{H}_R nach Eigenschaften, die für den Renormierungsprozeß wichtig sind. Die Morphismen liefern dann einen Vergleich beziehungsweise eine Übersetzung dieser Objekte. Diesen Vergleich können wir mit einer mengentheoretischen Beschreibung nicht durchführen. Wir werden sehen, daß diese Vergleiche eine wichtige Rolle in dem Renormierungsprozeß spielen.

Andererseits erlaubt uns eine Formulierung in der Sprache von Kategorien das Einführen einer assoziativitätsverletzenden Multiplikation (siehe Kapitel 2.3). Anlaß zur Einführung einer solchen Multiplikation bietet die Abbildung $\Gamma_{a,b} = g_a^{-1}g_b$ (3.6). Diese Darstellung liefert uns nichttriviale renormierte Polynome von $g_b(t)$, sofern $g_a(t) = R[g_b(t)]$, wobei R eine beliebige Renormierungsabbildung sein kann. Andernfalls, für $g_a \equiv g_b$, ist das Ergebnis trivial (3.6).

Mit $\Gamma_{a,b}$ können wir demnach Renormierung als Verhältnis einer Darstellung von \mathcal{H}_R mit ihrem Bild unter der Wirkung einer Renormierungsabbildung ansehen. Dies bedeutet, daß die invertierte Darstellung, welche wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit von links an die ursprüngliche Darstellung multipliziert haben, der Wirkung einer Renormierungsabbildung unterlag. Wir können deshalb $\Gamma_{a,b}$ auch als "asymmetrisch" in folgendem Sinne bezeichnen: Die Asymmetrie resultiert aus der einseitigen (in unserem Fall linksseitigen) Wirkung einer Renormierungsabbildung

$$\Gamma_{a,b}(t) = \underbrace{R[g_b^{-1}(t)]}_{\substack{\text{links asymmetrisch} \\ \text{durch Wirkung von } R}} \cdot \underbrace{g_b(t)}_{\text{ursprüngliche Darstellung}} \quad (4.1)$$

Was hat diese Tatsache nun mit monoidalen Kategorien zu tun?

Die Antwort auf diese Frage findet man, wenn man versucht in G_R eine Multiplikation einzuführen, die wie folgt definiert ist: Werden zwei Elemente multipliziert, so unterliegt das linke Element der Wirkung einer Renormierungsabbildung beziehungsweise eines Skalenwechsels. Somit wird die Multiplikation asymmetrisch, da nur das linke zu multiplizierende Element der Wirkung einer Renormierungsabbildung unterliegt.

Eine solche asymmetrische Multiplikation kann allerdings Probleme mit sich bringen, da aufgrund der Tatsache, daß Renormierungsabbildungen im Allgemeinen keine Ringhomomorphismen sind,

die Assoziativität der Multiplikation verletzt wird (was wir noch zeigen werden). Allerdings erhalten wir durch eine solche Modifikation der Multiplikation einen Vorteil: Die Inverse g_b^{-1} eines Charakters g_b ist keine "normale" Inverse mehr, sondern liefert durch die Asymmetrie der Multiplikation direkt das nichttriviale renormierte Ergebnis (4.1). Somit erhält die Inverse eine neue Interpretation aus Sicht von Renormierung. Durch die Verletzung der Assoziativität der Multiplikation kann das modifizierte Objekt G_R nicht mehr als Gruppe interpretiert werden. Vielmehr führt uns diese Konstruktion in das Gebiet der monoidalen Kategorien, da wir einen Assoziator für die Verletzung der Assoziativität angeben können. Die Gruppe G_R wird also in eine Kategorie mit monoidalem Produkt übergehen, wobei wir die Struktur der zugrundeliegenden Kategorie untersuchen werden. Weiterhin soll gezeigt werden, daß es möglich ist, eine bimonoidale Kategorie zu konstruieren und ihre natürliche Isomorphismen anzugeben, die den Kohärenzbedingungen bimonoidaler Kategorien genügen.

Die kategorientheoretische Interpretation von Renormierung im Rahmen der algebraischen Beschreibung vermittelt \mathcal{H}_R war dabei ursprünglich in einem von G_R unabhängigen Weg entstanden, wobei sich nach Veröffentlichung von [4] herausstellte, daß die durch die kategorientheoretische Beschreibung definierte monoidale Kategorie und die Gruppe G_R durch eine Kategorifizierung beziehungsweise einer *Dekategorifizierung*¹ miteinander vergleichbar sind, wobei eine noch zu definierende Modifikation des Produktes die Strukturen unterscheidet.

Diese modifizierte Kategorifizierung ist wie folgt zu interpretieren [34]:

Kategorifizierung von G_R		
Gruppe	Kategorifizierung	Kategorie
Gruppe G_R	\longrightarrow	Kategorie Φ
Element $g \in G_R$	\longrightarrow	Objekt $\phi \in \mathbf{Ob}(\Phi)$
Renormierungsabbildung R	\longrightarrow	Morphismus $\mathcal{R} \in \mathbf{Mor}(\Phi)$
Multiplikation \cdot	$\xrightarrow{\text{modifiziert}}$	Produkt monoidaler Kategorien \otimes_R

Die Tatsache, daß bei dieser Kategorifizierung Elemente der Gruppe G_R auf Objekte, die ihrerseits Mengen sind, abgebildet werden, erfordert eine Diskussion der Bedeutung der einzelnen Gruppenelemente, wodurch sich die Bestimmung der Objekte von Φ ergeben wird.

Wir werden weiterhin sehen, daß sich diese Kategorifizierung auf eine 2-Hopfalgebra erweitern läßt. Die dazu benötigten Kohärenzen der noch zu definierenden natürlichen Transformationen werden dabei bewiesen.

4.1 Die Objekte der Kategorie Φ

Der erste Schritt zur Definition einer Kategorie ist die Definition ihrer Objekte. Um jedoch Objekte einer Kategorie definieren zu können, müssen wir sorgfältig die Motivation zur Definition dieser Kategorie studieren.

Warum wollen wir eine kategorientheoretische Beschreibung von Renormierung suchen? Reicht eine mengentheoretische Beschreibung nicht aus?

In dem ersten Kapitel dieser Arbeit haben wir diskutiert, daß eine kategorientheoretische Beschreibung einer mathematischen Aussage dann sinnvoll ist, wenn man an Strukturen interessiert ist, die den Rahmen einer mengentheoretischen Beschreibung sprengen, wie

- die Möglichkeit, mathematische Objekte innerhalb einer Theorie vergleichen zu können
- mathematische Objekte einer Theorie zu ordnen beziehungsweise zu klassifizieren.

Da wir uns in diesem Kapitel nicht mit den Morphismen, also den "Vergleichen", beschäftigen, betrachten wir zunächst einmal den zweiten Punkt.

¹Die Dekategorifizierung *vergisst* dabei die Morphismen, die eine Eigenschaft von Kategorien sind. Häufig *dekatégorifiziert* man formal mit dem sogenannten *Forgetful Functor*. [16]

Wir suchen demnach Objekte, welche die Elemente, die wir zur algebraischen Beschreibung von Renormierung benötigen, sortieren.

In Kapitel 3.6 haben wir bereits diskutiert, daß der Renormierungsvorgang durch die Gruppe G_R aller Charaktere $\mathcal{H}_R \rightarrow V$ beschrieben werden kann.

Versuchen wir nun, diese Charaktere sinnvoll² in Objekte zusammenzufassen.

Um diese Charaktere zusammenfassen zu können müssen wir zunächst studieren, welche Eigenschaft der Charaktere wichtig für den Renormierungsvorgang ist.

Wir haben bereits gesehen, daß die Wirkung einer Renormierungsabbildung auf eine divergente Laurentreihe 3.5 bestimmend für den Renormierungsprozeß ist. Weiterhin haben wir in 3.5 diskutiert, daß wir jedes beliebige Renormierungsschema als baumabhängigen Skalenwechsel ausdrücken können.

Bemerkung: Wir betrachten deshalb im weiteren Verlauf der Arbeit stellvertretend für Renormierungsabbildungen nur noch (möglicherweise baumabhängige) Skalenwechsel. Wenn wir im weiteren Verlauf explizit von Renormierungsabbildungen sprechen, verstehen wir darunter ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Renormierungsabbildung R_{MS} .

Da den Skalenwechseln die zentrale Rolle im Renormierungsprozeß zukommt, ist ein Sortieren der Charaktere nach ihren Skalen (siehe 3.4) aus Sicht von Renormierung sinnvoll.

Somit sind Mengen, deren Elemente alle Charaktere $\mathcal{H}_R \rightarrow V$ sind, die durch dieselbe Skala charakterisiert werden, Kandidaten für die Objekte unserer gesuchten Kategorie Φ .

Wir wollen nun zunächst einmal diese Objekte definieren und dann ihre Bedeutung für die Renormierung diskutieren.

Um die Objekte definieren zu können, definieren wir uns zunächst einmal die Menge der Skalen:

$$\mathfrak{C} := \text{Der}(\mathcal{H}_R, \mathbf{R}^+) , \quad (4.2)$$

wobei $\text{Der}(\mathcal{H}_R, \mathbf{R})$ die Menge aller Derivationen von \mathcal{H}_R auf \mathbf{R}^+ ist. Wir bezeichnen die Elemente $a \in \mathfrak{C}$ als *Skalen*.

Die derivative Eigenschaft der Skalen ist dabei wie folgt definiert:

$$a(t_1 t_2) := \varepsilon(t_1) a(t_2) + a(t_1) \varepsilon(t_2) \quad \forall a \in \mathfrak{C} . \quad (4.3)$$

Wir sehen also, daß $a \in \mathfrak{C}$ nur dann nichttrivial wirkt, wenn es an einem einzelnen Wuzelbaum ausgewertet wird, also auf der linearen Basis $\{t\}$ von \mathcal{H}_R .

Auf der Menge \mathfrak{C} betrachten wir die Abbildungen

$$\phi : \mathfrak{C} \longrightarrow \text{CHAR}(\mathcal{H}_R) . \quad (4.4)$$

Das bedeutet, diese Abbildungen ordnen jeder Skala $a \in \mathfrak{C}$ einen Charakter auf \mathcal{H}_R zu.

Die Bilder dieser Abbildungen sind dann gerade die skalenabhängigen Charaktere des letzten Kapitels, deren Linearität in (3.40) definiert worden ist.

Mit dieser Klasse von Abbildungen definieren wir die folgende Menge:

$$\Phi_a := \left\{ \phi(a) \mid \phi : \mathfrak{C} \longrightarrow \text{CHAR}(\mathcal{H}_R) \right\} , \quad (4.5)$$

wobei $a \in \mathfrak{C}$ eine beliebige aber feste Skala ist.

Wie läßt sich die Menge Φ_a interpretieren?

Φ_a sind offensichtlich alle skalenabhängigen Charaktere auf \mathcal{H}_R , die durch eine Skala a (hier ist a als Variable zu verstehen) definiert ist. Wir können also interpretieren:

$$\Phi_a := \left\{ \phi_a \in \text{CHAR}(\mathcal{H}_R) \mid \phi_a(t) \in B^a \text{ und } t \in \mathcal{H}_R \right\} , \quad (4.6)$$

wobei B^a in (3.37) definiert war.

Bezeichnen wir mit $\text{Im}(\Phi_a)$ das Bild aller Abbildungen von Φ_a in V , so ist Φ_a gerade so definiert,

²Sinnvoll im Sinne des Renormierungsvorganges.

daß $\text{Im}(\Phi_a)$ nur Potenzen von Logarithmen $\ln(a(t))$ von Elementen $a \in \mathcal{V}$ enthält und keine Logarithmen anderer Skalen (4.5). Es gilt also:

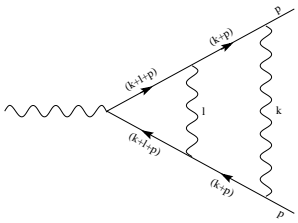
$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \ln(a)} \left[\phi_a(t) \Big|_{a(t)=1} \right] &= 0 \quad \forall \phi_a \in \Phi_a \\ \frac{\delta}{\delta \ln(b)} \left[\phi_a(t) \right] &= 0 \quad \forall b \neq a, \phi_a \in \Phi_a . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bemerkung: Der Differentialoperator $\frac{\delta}{\delta \ln(a)}$ ist hierbei als Funktionalableitung nach $\ln(a(t))$ zu verstehen.

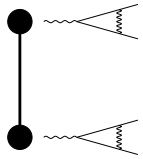
Da a und b zwei ungleiche Variablen sind, können wir solche Mengen eindeutig definieren. Diskutieren wir nun die Bedeutung der Objekte Φ_a für die Renormierung. Φ_a "sammelt" alle Charaktere aus $\text{CHAR}(\mathcal{H}_R)$, die durch die Skala $a \in \mathcal{V}$ definiert sind. Dabei ist a als eine beliebige aber feste Variable zu sehen. Betrachten wir zwei mögliche Elemente aus Φ_a . Diese beiden Charaktere sind zwei Spielzeugmodelle, die wir bereits in Kapitel 3.4 kennengelernt haben (3.43):

$$\begin{aligned} \phi_a^1(t) &:= \int_0^\infty \frac{x^{-\varepsilon}}{x+a} \prod_{j=1}^{f(t)} \Phi_x^1(t_j) dx \\ \phi_a^2(t) &:= \int_a^\infty x^{-1-\varepsilon} \prod_{j=1}^{f(t)} \Phi_x^2(t_j) dx . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Weitere Beispiele für Elemente eines Objektes Φ_a findet man in Quantenfeldtheorien. Betrachten wir zum Beispiel Quantenelektrodynamik, so treten dort Integrale der Form


(4.9)

Darstellung als Wurzelbaum



$\phi \in \text{CHAR}(\mathcal{H}_R)$

$$e^5 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu [(\not{p} + \not{k}) + m] \gamma^\beta [(\not{p} + \not{k} + \not{l}) + m] \gamma_\alpha [(\not{p} + \not{k} + \not{l}) + m] \gamma_\beta [(\not{p} + \not{k}) + m] \gamma_\nu}{k^2 l^2 ((p+k)^2 - m^2)^2 ((p+k+l)^2 - m^2)^2}$$

auf. Da die Massen zur Divergenz dieses Integrals nicht beitragen, kann dieser Ausdruck bei Impulsübertrag Null nach dimensionaler Regularisierung auf folgende Integraltypen zurückgeführt

werden:

$$\int d^D k \frac{1}{[k^2]^l [(k+p)^2]^m} = \pi^{D/2} [p^2]^{D/2-l-m} \quad (4.10)$$

$$\frac{\Gamma(l+m-\frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2}-l) \Gamma(\frac{D}{2}-m)}{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(D-l-m)}$$

$$\int d^D k [k^2]^l = 0 \quad \forall l, m \in \mathbf{C}; \quad (4.11)$$

Man sieht schnell, daß solche Integrale durch Charaktere definiert sind, da die Gammafunktionen die Polterme der Laurentreihe in ε liefern

$$\Gamma(\varepsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi_1(n+1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \quad (4.12)$$

wo

$$\psi_1(n+1) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \gamma, \quad (4.13)$$

wobei γ die *Eulerzahl* ist.

Die Logarithmen der Skala $a \in \mathfrak{U}$ erhält man durch die Reihenentwicklung

$$a^{n\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n\varepsilon \ln(a))^n}{n!}. \quad (4.14)$$

Ebenso erhalten wir für andere Quantenfeldtheorien, wie skalare Theorien, QCD oder dem Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung, Beispiele für Charaktere, die wir mit Hilfe der Variablen $a \in \mathfrak{U}$ charakterisieren können.

Nachdem wir Beispiele für Elemente von Φ_a gesehen haben, kommen wir zurück zur Interpretation solcher Objekte Φ_a .

Die Menge Φ_a sammelt also Charaktere von h auf V , die durch eine Skala (Variable) a definiert sind. Die Elemente der Menge Φ_a , also die Charaktere, repräsentieren verschiedene Theorien: Verschiedene Spielzeugmodelle und verschiedene Quantenfeldtheorien, wie QED, QCD, skalare Theorien oder elektroschwache Wechselwirkung.

Somit läßt sich die Wirkung von Skalenwechseln sehr kompakt formulieren: Als Wirkung auf eine Menge Φ_a , unabhängig der Theorie, auf der sie wirkt. Doch dazu mehr im nächsten Kapitel über die Morphismen der Kategorie.

Bis jetzt haben wir nur Objekte definiert, die durch eine Skala beschrieben werden.

Es gibt allerdings Charaktere, die aufgrund der Gruppenstruktur von $CHAR(\mathcal{H}_R)$ durch mehr als eine Skala charakterisiert sind:

$$(\phi_a^1 * \phi_b^2)(t) = \underbrace{\phi_a^1(t)}_{\text{Skala } a} \cdot \underbrace{(\phi_b^2)(t)}_{\text{Skala } b} \quad (4.15)$$

Wir definieren deshalb Objekte, die durch mehrere Skalen beschrieben werden.

Sei dazu

$$\phi' : \underbrace{\mathfrak{U} \times \dots \times \mathfrak{U}}_{n\text{-mal}} \longrightarrow CHAR(\mathcal{H}_R). \quad (4.16)$$

Mit diesen Abbildungen können wir folgende Menge Definieren:

$$\Phi_{(a_1, \dots, a_n)} := \left\{ \phi'((a, \dots, a_n)) \mid \phi' : \underbrace{\mathfrak{U} \times \dots \times \mathfrak{U}}_{n\text{-mal}} \longrightarrow CHAR(\mathcal{H}_R) \right\}. \quad (4.17)$$

Um Schreibarbeit zu sparen, definieren wir sogenannte *Multiskalen*, zum Beispiel

$$C := (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{A}^n \quad (4.18)$$

und können mit solchen Multiskalen die Schreibweise

$$\Phi_C = \Phi_{(a_1, \dots, a_n)} \quad (4.19)$$

eingeführen.

Interpretieren wir nun solche Mengen (4.17).

Sei dazu A eine Multiskala. Wir interpretieren

$$\Phi_A := \left\{ \phi_A \in \mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R) \mid \phi_A(t) \in B^A \text{ und } t \in \mathcal{H}_R \right\}, \quad (4.20)$$

analog der Definition von B^A in (3.38).

Haben wir mit der Definition dieser Objekte alle möglichen auftretenden Charaktere klassifiziert? Die Antwort ist "ja", zumindest für den Fall von Darstellungen auf Laurentreihen.

Wir wollen aber auch Reihen betrachten, die keine Polterme besitzen, die also nicht "divergent" sind. Die Charaktere renormierter Feynmangraphen gehören zum Beispiel zu der Klasse polfreier Darstellungen.

Da wir über Renormierung reden wollen ist es sinnvoll, die Menge solcher Charaktere zu betrachten. Wir definieren deshalb:

$$\Phi_{\text{fin}} = \left\{ \phi \in \mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R) \mid \phi(t) \in k[[\varepsilon]] \quad \forall t \in \mathcal{H}_R \right\}. \quad (4.21)$$

In dieser Menge können Charaktere verschiedener Skalen sitzen, vorausgesetzt sie produzieren keine Polterme.

Zuletzt wollen wir eine Menge von Charakteren einführen, deren Bedeutung an diesem Punkt noch nicht klar wird. Wir greifen der bis jetzt definierten Struktur ein wenig voraus und richten unser Augenmerk auf die Definition monoidaler Kategorien. Eine monoidale Kategorie benötigt ein ausgezeichnetes Objekt, das Einsobjekt (siehe Kapitel 2.3). Diese Struktur wollen wir ein wenig vorwegnehmen und definieren eine Menge

$$I := \left\{ \phi \in \mathcal{CHAR}(\mathcal{H}_R) \mid \phi(t) = \varepsilon(t)\mathbf{1} \right\}. \quad (4.22)$$

Wie kann man die Elemente von I konstruieren? Betrachten wir eine beliebige Darstellung ϕ_a . Definieren wir $\tilde{\phi}_a := \phi_a \circ \varepsilon$ so sehen wir, daß $\tilde{\phi}_a \in I$, denn

$$\phi_a(\varepsilon(t)) = \begin{cases} 1, & t = e \\ 0, & t \neq e \end{cases}. \quad (4.23)$$

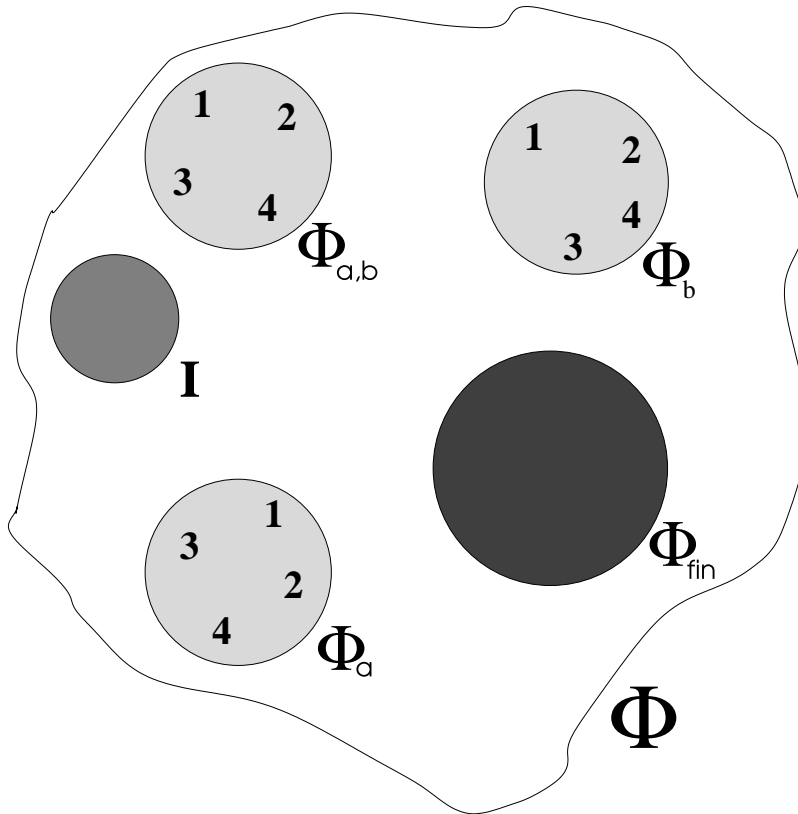
Da die Darstellungen von I keine Polterme in den Laurentreihen produzieren, gilt $I \subset \Phi_{\text{fin}}$.

Somit haben wir alle Objekte definiert, die zur Klassifikation der Charaktere von \mathcal{H}_R auf V bezüglich Renormierung notwendig sind.

Fassen wir zusammen: Wir definieren die Objekte der Kategorie Φ wie folgt:

$$\mathbf{Ob}(\Phi) := \{ \Phi_A \mid A \in \mathfrak{A}^n \quad \forall n \in \mathbf{N} \} \cup \Phi_{\text{fin}} \cup I. \quad (4.24)$$

Vereinfacht können wir uns $\mathbf{Ob}(\Phi)$ bildlich folgendermaßen vorstellen:



(4.25)

Da die Eigenschaften der Objekte von Φ durch ihre Elemente, den einzelnen Charakteren, gegeben sind, werden wir unter anderem auch Definitionen und Beweise der Strukturen in dieser Kategorie auf der Stufe der Elemente durchführen.

Auf folgenden Punkt soll noch aufmerksam gemacht werden: da es sich um k -lineare Darstellungen handelt, wollen wir folgende Erweiterung einführen: Jede Menge Φ_A , $A \in \mathcal{U}^n$ für beliebiges $n \in \mathbf{N}$, wird noch um eine Nullabbildung ϕ_A^0 erweitert:

$$\Phi_A \implies \Phi_A \cup \{\phi_A^0\} , \quad (4.26)$$

wobei ϕ_A^0 wie folgt definiert ist:

$$\phi_A^0(t) = \phi_A(0 \cdot t) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{H}_R . \quad (4.27)$$

Da der Darstellungsraum V ein Polynomring ist und die Charaktere von \mathcal{H}_R k -lineare Abbildungen sind, tragen die Mengen Φ_A mit den Nullabbildungen eine Vektorraumstruktur.

Bemerkung: Im folgenden werden wir exemplarisch nur Objekte Φ_a betrachten, die durch eine Skala definiert sind. Die erarbeiteten Eigenschaften übertragen sich natürlich auch auf die Objekte Φ_A , wo A eine beliebige Multiskala ist.

An diesem Punkt sind wir noch in der "Welt" der Mengentheorie. Wir haben eine Menge Φ definiert, deren Elemente Φ_a Mengen von Charakteren gleicher Skalen sind. Leider reicht diese mengentheoretische Formulierung zur Beschreibung von Renormierung nicht aus. Im Renormierungsprozeß werden Verhältnisse von Elementen zweier Objekte, zum Beispiel Φ_a und Φ_b , gebildet. Dabei dürfen die Elemente von Φ_a und Φ_b nicht willkürlich, sondern müssen vergleichbar in folgendem Sinne sein: Die Darstellungen beider Elemente müssen dasselbe Verhalten im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ haben. Um solche Elemente aus Φ_a und Φ_b auswählen zu können, benötigen wir jedoch einen Vergleich zwischen den Elementen Φ_a und Φ_b der Menge Φ . Wir verlassen also die Mengentheorie, da wir die Morphismen einer Kategorie für einen solchen Vergleich benötigen.

Die Objekte Φ_a der Kategorie Φ sind eine Art ‘‘Repräsentant’’ für alle auftretenden Theorien, also echte Quantenfeldtheorien und deren Spielzeugmodelle, die durch eine Skala charakterisiert sind. Mit Hilfe dieser Repräsentanten werden wir in unserer kategorientheoretischen Untersuchung den Renormierungsvorgang beschreiben. Das bedeutet, daß wir eine theorieunabhängige Formulierung in Form einer Kategorie erhalten. Die Morphismen werden dabei die Vergleiche zwischen den einzelnen Objekten, also den Theorien mit verschiedenen Skalierungen, ermöglichen.

4.2 Die Morphismen von Φ

Wir haben in dem letzten Kapitel bereits angesprochen, daß eine mengentheoretische Beschreibung nicht ausreicht, um mit der Menge $\mathbf{Ob}(\Phi)$ Renormierung beschreiben zu können. Das Problem der mengentheoretischen Beschreibung ist, daß man zwar zwei unterschiedliche Elemente, zum Beispiel Φ_a und Φ_b , besitzt, so daß man zwischen zwei Charakteren dieser Elemente Verhältnisse bilden kann, jedoch ist folgender wichtiger Aspekt des Renormierungsprozesses durch eine mengentheoretische Interpretation nicht beschreibbar: Für den Renormierungsprozeß ist es wichtig, daß die beiden Charaktere aus Φ_a und Φ_b einen Wurzelbaum auf zwei Laurentreihen in V abbilden, die dasselbe Divergenzverhalten besitzen, damit das Verhältnis der beiden Charaktere ein renormiertes Ergebnis liefert. Mit anderen Worten, wir benötigen die Möglichkeit eines Vergleiches zwischen den Objekten von Φ , also Abbildungen, die ein Objekt Φ_a auf ein anderes Objekt Φ_b abbilden, so daß jeder Charakter aus Φ_a einen Counterpart in Φ_b findet, dessen Darstellungen dasselbe Divergenzverhalten besitzen. Dabei ist eine Unterscheidung der einzelnen Charaktere der Objekte nicht wichtig, da der Renormierungsprozeß unabhängig von der betrachteten Theorie³ ist. Wichtig ist nur die Skala, welche das Objekt und damit all seine enthaltenen Charaktere definiert.

Wie die Skalenwechsel auf dem Raum der Laurentreihen V aussehen, haben wir bereits in Kapitel 3.5 diskutiert. Nun müssen wir gleichwertige Abbildungen als Morphismen zwischen den Objekten der Kategorie Φ definieren.

Beginnen wir mit der Definition auf der Stufe der Skalen. Wir definieren eine Abbildung $r_{a,b} \in \text{End}(\mathfrak{U})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} r_{a,b} : \mathfrak{U} &\longrightarrow \mathfrak{U} \\ a &\longmapsto b \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dies ist die grundlegendste Abbildung zwischen Skalen, die wir definieren können. Diese Abbildungen macht auch als Grundlage für unsere Morphismen Sinn, denn die Objekte der zu definierenden Kategorie sind ja gerade über der Menge \mathfrak{U} beziehungsweise \mathfrak{U}^n definiert. ‘‘Liften’’ wir die Abbildungen $r_{a,b}$ auf die Stufe der Objekte, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_a & \xrightarrow{\mathcal{R}_{a,b} := r_{a,b}^*} & \Phi_b \\ \uparrow \phi & & \uparrow \phi \\ a & \xrightarrow{r_{a,b}} & b \end{array} \quad (4.29)$$

Analog definieren wir Morphismen für Objekte, die durch beliebige Multiskalen klassifiziert sind, indem wir die Abbildung

$$r_{A,B} \in \text{End}(\mathfrak{U}^n) := \text{End}(\underbrace{\mathfrak{U} \times \dots \times \mathfrak{U}}_n) \quad (4.30)$$

als Grundlage zur Definition eines Morphismus nehmen. Ebenso ist $r_{C,D} \in \text{Hom}(\mathfrak{U}^m, \mathfrak{U}^n)$ möglich. Wie können wir diese Morphismen interpretieren?

³Jeder Charakter eines Objekts entspricht einer ‘‘Theorie’’, also einem Spielzeugmodell oder einer speziellen Quantenfeldtheorie.

Eine Interpretation können wir geben, wenn wir uns den Pullback der Abbildungen $r_{a,b}$ auf dem Raum von Laurentreihen V , mit $B^a, B^b \subset V$, betrachten:

$$\begin{array}{ccc}
 B^a & \xrightarrow{R_{a,b} := r_{a,b}^*} & B^b \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 a & \xrightarrow{r_{a,b}} & b
 \end{array} \quad (4.31)$$

wobei B^a in (3.37) definiert war.

Dort sind die Pullbacks gerade die Skalenwechsel von Laurentreihen, die durch Skalen a und b beschrieben werden.

Wir können also die Morphismen $\mathcal{R}_{a,b}$ wie folgt interpretieren:

$$\mathcal{R}_{a,b}[\phi_a](t) = R_{a,b}[\phi_a(t)] \quad (4.32)$$

also

$$\mathcal{R}_{a,b}[\phi_a] := R_{a,b} \circ \phi_a \quad (4.33)$$

Auf einen speziellen Punkt wollen wir noch kurz unser Augenmerk richten. Die Objekte $\Phi_a \in \mathbf{Ob}(\Phi)$ waren als k -Vektorräume definiert worden. Insbesondere enthält jedes Objekt somit ein Nullelement. Es ist deshalb naheliegend, folgende Abbildungen, Nullmorphismen genannt, zu definieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}_{a,b}^0 : \Phi_a & \longrightarrow & \Phi_b \\
 \phi_a^i & \longmapsto & \phi_b^0 \quad ,
 \end{array} \quad (4.34)$$

die jedes Element eines Objektes auf den Null-Charakter des anderen Objektes wirft. Diese Abbildung existiert für jedes Paar von Indizes.

Wie sind die Domäne und Kodomäne der Pullbacks der Skalenwechsel definiert?

Es gilt

$$\mathcal{R}_{a,b} : \Phi_a \longrightarrow \Phi_b \quad (4.35)$$

daraus folgt für die Domäne und Kodomäne der neuen Morphismen:

$$\begin{aligned}
 \text{dom}(\mathcal{R}_{a,b}) &= \Phi_a \\
 \text{cod}(\mathcal{R}_{a,b}) &= \Phi_b \quad .
 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Somit haben wir die Morphismen der Kategorie Φ definiert:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Mor}(\Phi) &:= \\
 &\{ \mathcal{R}_{A,B} \mid A \in \mathfrak{U}^n, B \in \mathfrak{U}^m \ \forall n, m \in \mathbf{N} \} \cup \{ \mathcal{R}_{A,B}^0 \mid A \in \mathfrak{U}^n, B \in \mathfrak{U}^m \ \forall n, m \in \mathbf{N} \}
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Wir haben zwar jetzt die Morphismen der Kategorie definiert, sind aber dabei einer sensiblen interpretatorischen Frage aus dem Weg gegangen: Gilt die Behauptung (4.36) auch für baumabhängige Skalenwechsel, die eine ‘‘Übersetzung’’ einer Renormierungsabbildung R_{MS} sind?⁴ Oder anders gefragt: Finden wir eine Skala \bar{a} , so daß wir die Wirkung von R_{MS} auf alle dargestellten Polynome von Φ_a als Skalenwechsel $R_{a,\bar{a}}$ darstellen können? Bis jetzt hatten wir nur diskutiert (siehe Kapitel 3.5), wie wir eine solche Skala für die Wirkung von R_{MS} auf eine einzelne Laurentreihe finden können. Dabei war diese Skala individuell von der betrachteten Laurentreihe abhängig (3.74).

Trotzdem heißt die Antwort ‘‘ja’’ obwohl wir uns vorstellen können, daß \bar{a} eine Multiskala sein

⁴ R_{MS} steht hierbei stellvertretend für jedes beliebige Renormierungsschema.

muß, da zur Beschreibung mehrerer Charaktere eines Objektes natürlich mehrere baumabhängige Skalen betrachtet werden müssen.

Das zu der Skala gehörige Objekt $\Phi_{\bar{a}}$ wird jedoch nichttrivial sein. An diesem Punkt haben wir noch nicht genügend Struktur eingeführt, um solche Objekte definieren zu können. Wir werden dies allerdings im nächsten Kapitel nachholen.

Gehen wir im Moment einmal davon aus es gäbe eine solche Skala \bar{a} . Da wir ohne bestimmte Vorstellung von dem Objekt $\Phi_{\bar{a}}$ den Morphismus $\mathcal{R}_{a,\bar{a}}$ nicht definieren können, betrachten wir uns zunächst einmal die Bedeutung eines Skalenwechsels $\tilde{R}_{a,\bar{a}}$ ⁵ als Abbildung auf dem Polynomraum V . Das bedeutet: Für jeden Charakter $\Phi_a^\kappa \in \Phi_a$ ist dieses Diagramm erfüllt:

$$\begin{array}{ccc} \phi_a^\kappa(t) & \xrightarrow{\tilde{R}_{a,\bar{a}}} & \phi_{a^\kappa}^\kappa(t) \\ & \searrow R_{MS} & \nearrow \cong \\ & \langle \phi_a^1(t) \rangle & \end{array} \quad (4.38)$$

wobei die Äquivalenz \cong in folgendem Sinne zu verstehen ist:

$$Z_{\tilde{R}_{a,\bar{a}}}(\phi_a^\kappa(t)) = Z_{R_{MS}}(\phi_a^\kappa(t)) \quad . \quad (4.39)$$

Somit stehet der abstrakte Skalenwechsel $\tilde{R}_{a,\bar{a}}$ stellvertretend für eine ganze Familie von Skalenwechseln, wie man in dem folgenden Beispiel sieht:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{a,\bar{a}}[\phi_a^1(t)] &\equiv R_{a,\bar{a}^1}[\phi_a^1(t)] \cong R_{MS}[\phi_a^1(t)] \\ \tilde{R}_{a,\bar{a}}[\phi_a^2(t)] &\equiv R_{a,\bar{a}^2}[\phi_a^2(t)] \cong R_{MS}[\phi_a^2(t)] \\ \tilde{R}_{b,\bar{b}}[\phi_b^\kappa(t)] &\equiv R_{b,\bar{b}^\kappa}[\phi_b^\kappa(t)] \cong R_{MS}[\phi_b^\kappa(t)] \quad , \end{aligned} \quad (4.40)$$

Demnach muß für die Multiskala \bar{a} gelten:

$$\bar{a} \in \mathfrak{q}^{\#\Phi_a} \quad , \quad (4.41)$$

wobei $\#\Phi_a$ die Anzahl der Charaktere von Φ_a ist.

Dabei muß \bar{a} die Skalen

$$\bigcup_{i=1}^{\#\Phi_a} \{\bar{a}^i\} \quad (4.42)$$

beinhalten, um die Eigenschaft (4.40) erfüllen zu können.

Wie nun exakt die Wirkung von $\tilde{R}_{a,\bar{a}}$ definiert ist, werden wir allerdings erst im nächsten Kapitel auf der Stufe der Morphismen definieren.

Somit können wir sagen:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}) &= \Phi_a \\ \text{cod}(\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}) &= \Phi_{\bar{a}} \quad . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dabei wirkt $\mathcal{R}_{a,\bar{a}}$ gemäß (4.40) als Pullback des Skalenwechsels $\tilde{R}_{a,\bar{a}}$ auf jeden Charakter des Objektes $\Phi_{\bar{a}}$ verschieden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}[\phi^1] &\equiv \mathcal{R}_{a,\bar{a}^1}[\phi_a^1] \\ \tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}[\phi_a^2] &\equiv \mathcal{R}_{a,\bar{a}^2}[\phi_a^2] \\ \tilde{\mathcal{R}}_{b,\bar{b}}[\phi_b^\kappa] &\equiv \mathcal{R}_{b,\bar{b}^\kappa}[\phi_b^\kappa] \quad . \end{aligned} \quad (4.44)$$

⁵Die Tilde \sim deutet an, daß es sich hierbei um einen abstrakten Skalenwechsel handelt, der stellvertretend für eine Familie von Skalenwechseln steht.

Bevor wir weitere Eigenschaften der Morphismen diskutieren, wollen wir einen weiteren abstrakten Skalenwechsel \tilde{R} einführen, der folgende Eigenschaft erfüllt:

$$Z_{\tilde{R}}(\phi(t)) = Z_{R_{MS}}(\phi(t)) \quad \forall \phi \in CHAR(\mathcal{H}_R) . \quad (4.45)$$

Somit wirkt der abstrakte Skalenwechsel \tilde{R} wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{R}[\phi_a^1(t)] &= \tilde{R}_{a,\bar{a}}[\phi_a^1(t)] \equiv R_{a,\bar{a}^1}[\phi_a^1(t)] \cong R_{MS}[\phi_a^1(t)] \\ \tilde{R}[\phi_a^2(t)] &= \tilde{R}_{a,\bar{a}}[\phi_a^2(t)] \equiv R_{a,\bar{a}^2}[\phi_a^2(t)] \cong R_{MS}[\phi_a^2(t)] \\ \tilde{R}[\phi_b^k(t)] &= \tilde{R}_{b,\bar{b}}[\phi_b^k(t)] \equiv R_{b,\bar{b}^k}[\phi_b^k(t)] \cong R_{MS}[\phi_b^k(t)] . \end{aligned} \quad (4.46)$$

\tilde{R} übernimmt also die Skala der Laurentreihe, auf die er wirkt.

\tilde{R} steht demnach also stellvertretend als Übersetzung von R_{MS} als Skalenwechsel. Dieser Skalenwechsel besitzt jedoch eine interessante Eigenschaft: Wirkt \tilde{R} zum Beispiel auf ein Polynom $\phi_a^1(t)$, so entspricht \tilde{R} gerade einem Skalenwechsel R_{a,\bar{a}^1} , der die Skala a auf eine baumabhängige Skala \bar{a}^1 übergeführt. $\phi_a^1(t)$ wird somit auf eine Laurentreihe der Skala \bar{a}^1 abgebildet. Auf dieses Polynom können wir nun erneut einen Skalenwechsel \tilde{R} wirken lassen, also

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\tilde{R}(\phi_a^1(t))) &= \tilde{R}(R_{a,\bar{a}^1}(\phi_a^1(t))) \\ &= \tilde{R}(\phi_{\bar{a}^1}^1(t)) . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Da aber die Z -Faktoren des Polynoms bereits keinen konvergenten Anteil, also keine Terme $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$, mehr besitzen, so besitzt auch die Laurentreihe $\phi_{\bar{a}^1}^1(t)$ keine konvergenten Anteile mehr, und demnach wirkt \tilde{R} bei der zweiten Anwendung wie eine Identität.⁶ Es gilt also

$$\tilde{R}(\phi_{\bar{a}^1}^1(t)) = \phi_{\bar{a}^1}^1(t) \quad (4.48)$$

und demnach

$$(\tilde{R})^2 = \tilde{R} \quad (4.49)$$

was sinnvoll ist, da $(R_{MS})^2 = R_{MS}$.

Betrachten wir die Eigenschaften des mit dem Skalenwechsel \tilde{R} verknüpfte Morphismus⁷

$$\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{R}^* . \quad (4.50)$$

Es gilt offensichtlich

$$\tilde{\mathcal{R}} : \Phi_a \longrightarrow \Phi_{\bar{a}} \equiv \tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}} : \Phi_a \longrightarrow \Phi_{\bar{a}} . \quad (4.51)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}}(\Phi_a)) &= \tilde{\mathcal{R}}(\Phi_{\bar{a}}) \\ &= id_{\bar{a}}(\Phi_{\bar{a}}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

und somit gilt:

$$\tilde{\mathcal{R}}^2 = \tilde{\mathcal{R}} . \quad (4.53)$$

Diese Eigenschaft gilt nur für diesen abstrakten Morphismus, denn ein Morphismus $\mathcal{R}_{a,b}^2$ ist aufgrund

$$\text{dom}(\mathcal{R}_{a,b}) \neq \text{cod}(\mathcal{R}_{a,b}) \quad (4.54)$$

⁶ \tilde{R} ist ja gerade die Übersetzung von R_{MS} als Skalenwechsel, und R_{MS} wirkt trivial auf Laurentreihen ohne Anteil $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$.

außer für den Identitätsmorphismus nicht definiert.

Wir werden allerdings der Übersichtlichkeit einiger späterer Beweise halber die Notation $\mathcal{R}_{a,b}^2$ beibehalten, um die Eigenschaft $\mathcal{R}_{a,b}^2 = \mathcal{R}_{a,b}$ zu verdeutlichen.

Betrachten wir zwei Mengen Φ_a, Φ_b , klassifiziert durch zwei unterschiedliche aber beliebige Sätze von Skalen a, b , so definieren wir die Hom-Menge

$$\text{Hom}(\Phi_a, \Phi_b) = \text{span}_k \left(\{ \mathcal{R} \in \text{End}(\text{CHAR}(\mathcal{H}_R)) \mid \mathcal{R} : \Phi_\zeta \longrightarrow \Phi_\xi \} \right) , \quad (4.55)$$

wobei natürlich auch die Nullmorphisamen (4.34) berücksichtigt werden. Es gilt demnach:

$$\text{Hom}(\Phi_a, \Phi_b) = \text{span}_k \left(\{ \mathcal{R}_{a,b} \} \cup \{ \mathcal{R}_{a,b}^0 \} \right) . \quad (4.56)$$

Die Hom-Mengen $\text{Hom}(\Phi_a, \Phi_b)$ sind demnach k -Vektorräume.

Das bedeutet, Φ ist eine in \mathbf{vec} bereicherte Kategorie, zwischen denen das Tensorprodukt von Vektorräumen $\otimes_{\mathbf{vec}}$ definiert ist. Somit ist Φ eine k -lineare Kategorie, ja sogar ein 2-Vektorraum, auf dem ein Tensorprodukt \square definiert ist.

Dies ist nicht verwunderlich, haben wir es doch mit Darstellungen zu tun, die ebenfalls eine lineare Struktur tragen.

Unsere so definierte Kategorie Φ ist aus Sicht von Renormierung ein logisches Gebilde: Objekte entsprechen Klassifikationen der Charaktere beziehungsweise der verschiedenen Theorien bezüglich ihrer Bedeutung für die Renormierung, Morphismen bilden die Skalenwechsel, welche für die bei Renormierung wichtige Bildung von Verhältnissen zweier Darstellungen die Grundlage sind.

Nachdem wir jetzt die Morphismen der Kategorie Φ eingeführt haben, wollen wir noch eine wichtige Eigenschaft diskutieren: Die Invertierbarkeit der Morphismen.

Die Morphismen $\mathcal{R}_{a,b}$ der Kategorie Φ sind über Pullbacks mit Skalenwechseln $R_{a,b}$ des Raumes V verbunden. Da die Skalenwechsel invertierbar sind, existiert demnach zu jedem Morphismus $\mathcal{R}_{a,b}$ ein inverser Morphismus $\mathcal{R}_{a,b}^{-1}$. Wir werden in dem nächsten Kapitel sehen (4.79), daß diese Aussage auch uneingeschränkt für Skalenwechsel des Typs $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ gilt, was nicht direkt ersichtlich ist.⁷ Wir werden sogar zeigen, daß ein inverser Morphismus zu dem abstrakten Morphismus $\tilde{\mathcal{R}}$ existiert, den wir mit $\tilde{\mathcal{R}}^{-1}$ bezeichnen.

Wie wir in diesem Kapitel bereits erwähnt haben, benötigen wir noch weitere mathematische Strukturen, um die Objekte des Typs $\Phi_{\bar{a}}$ und Morphismen $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ sowie $\tilde{\mathcal{R}}$ definieren zu können. Wir werden dazu in dem nächsten Kapitel eine additive Struktur auf der Kategorie Φ einführen.

4.3 Die additive Struktur von Φ

Bis jetzt haben wir eine k -lineare Kategorie Φ definiert, die zusätzlich noch mit einem Tensorprodukt \square ausgestattet ist. Die Morphismen der Kategorie sind Pullbacks der Skalenwechsel auf dem Polynomraum V . Dabei stießen wir auf folgende Probleme:

- Wie ist ein Objekt $\Phi_{\bar{a}}$ definiert, so daß wir den Pullback der als Skalenwechsel übersetzten Renormierungsabbildung $R_{MS}, \mathcal{R}_{a,\bar{a}}$, betrachten können (4.43)?
- wie sind die Morphismen $\mathcal{R}_{a,\bar{a}}$ (4.43) und $\tilde{\mathcal{R}}$ (4.50) definiert?

Um diese Objekte und Morphismen definieren zu können, müssen wir zunächst eine additive Struktur auf Φ einführen.

Betrachten wir dazu zuerst die Hom-Mengen der Kategorie Φ (4.56). Die Hom-Mengen definierten durch ihre Vektorraumstruktur eine k -lineare Kategorie mit Tensorprodukt \square .

Untersuchen wir zunächst noch weitere Eigenschaften der Hom-Mengen.

Da der Darstellungsraum V der Charaktere ein Polynomring ist, existiert ein wohldefinierte Summe der dargestellten Polynome. Betrachten wir eine Hom-Menge $\text{Hom}(\Phi_a, \Phi_b)$ (4.56).

⁷Diese Aussage ist an diesem Punkt noch nicht nachvollziehbar, da wir noch keine exakte Definition der abstrakten Morphismen des Typs $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ gegeben haben.

Da jeder k -Vektorraum auch gleichzeitig eine additive abelsche Gruppe ist, läßt sich eine Addition $\lambda\mathcal{R}_{a,b} + \nu\mathcal{R}_{a,b}$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} (\lambda\mathcal{R}_{a,b} + \nu\mathcal{R}_{a,b})\Phi_a : &= \lambda\mathcal{R}_{a,b}[\phi_a] + \nu\mathcal{R}_{a,b}[\phi_a] \\ &= (\lambda + \nu)\mathcal{R}_{a,b}[\phi_a] . \end{aligned} \quad (4.57)$$

Das Nullelement der abelschen Gruppe ist dabei $R_{a,b}^0$.

Die Komposition ist ebenfalls ein Morphismus abelscher Gruppen, denn

$$(\lambda\mathcal{R}_{a,b} + \nu\mathcal{R}_{a,b}) \circ \eta\mathcal{R}_{b,c} = (\lambda\mathcal{R}_{a,b} \circ \eta\mathcal{R}_{b,c}) + (\nu\mathcal{R}_{a,b} \circ \eta\mathcal{R}_{b,c}) . \quad (4.58)$$

Mithin ist Φ eine AB -Kategorie.

Die Frage ist, ob eine Einführung einer additiven Struktur aus Sicht von Renormierung sinnvoll erscheint. Die Bedeutung der additiven Struktur von Φ wird schnell klar, wenn man sich die Konstruktion eines Objektes $\Phi_{\bar{a}} = \text{cod}(\mathcal{R}_{a,\bar{a}})$ (4.43) näher betrachtet. Im letzten Kapitel haben wir bereits diskutiert, daß die Skala \bar{a} eine Multiskala sein muß, welche die Skalen

$$\bigcup_{i=1}^{\#\Phi_a} \{\bar{a}^i\} , \quad (4.59)$$

(4.42) beinhaltet. Wie allerdings das Objekt $\Phi_{\bar{a}}$ definiert ist können wir nur unter Zuhilfenahme einer additiven Struktur beschreiben.

Zunächst erweitern wir die präadditive Struktur von Φ . Wir betrachten die Menge

$$\Phi_a \times \Phi_b , \quad (4.60)$$

also das Kartesische Produkt zweier Objekte Φ_a, Φ_b . Zusätzlich definieren wir noch vier Morphismen

$$\begin{aligned} i_1 : \Phi_a &\longrightarrow \Phi_a \times \Phi_b \\ \phi_a &\longmapsto (\phi_a, \phi_b^0) \\ p_1 : \Phi_a \times \Phi_b &\longrightarrow \Phi_a \\ (\phi_a, \phi_b) &\longmapsto \phi_a \\ i_2 : \Phi_b &\longrightarrow \Phi_a \times \Phi_b \\ \phi_b &\longmapsto (\phi_a^0, \phi_b) \\ p_2 : \Phi_a \times \Phi_b &\longrightarrow \Phi_b \\ (\phi_a, \phi_b) &\longmapsto \phi_b . \end{aligned} \quad (4.61)$$

Diese Abbildungen erfüllen offensichtlich folgende Eigenschaften:

$$p_1 \circ i_1 = \text{id}_a \quad (4.62)$$

$$p_2 \circ i_2 = \text{id}_b$$

$$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \text{id}_{a \times b} , \quad (4.63)$$

wobei die Indizes der Identitätsmorphismen die Skalen der Objekte angeben.

Somit erfüllt unsere Konstruktion das Biproductdiagramm (2.42). Da diese Konstruktion mit jedem Paar von Objekten gemacht werden kann, definiert dies ein direktes Produkt auf Φ :

$$\begin{aligned} \oplus : \Phi \times \Phi &\longrightarrow \Phi \\ \Phi_a \times \Phi_b &\longmapsto \Phi_a \oplus \Phi_b . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Die Charaktere des direkten Produktes $\Phi_a \times \Phi_b$ sind wie folgt zu interpretieren:

$$\Phi_a \oplus \Phi_b = \left\{ \phi_a' + \phi_b' \mid \phi_a' \in \Phi_a, \phi_b' \in \Phi_b \right\} . \quad (4.65)$$

Somit faktorisiert jeder Morphismus $\mathcal{R}_{d,a\oplus b} : \Phi_d \longrightarrow \Phi_a \oplus \Phi_b$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc}
 & \Phi_a \oplus \Phi_b & \\
 i_1 \nearrow & & \nwarrow i_2 \\
 \Phi_a & & \Phi_b \\
 \mathcal{R}_{d,a} \searrow & & \nearrow \mathcal{R}_{d,b} \\
 & \Phi_d &
 \end{array} , \tag{4.66}$$

also

$$\begin{aligned}
 i_1(\mathcal{R}_{d,a}[\phi_d]) + i_2(\mathcal{R}_{d,b}[\phi_d]) &= (\mathcal{R}_{d,a}[\phi_d] + \phi_b^0) + (\phi_a^0 + \mathcal{R}_{d,b}[\phi_d]) \\
 &= \mathcal{R}_{d,a}[\phi_d] + \mathcal{R}_{d,b}[\phi_d] .
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Nach [21] gibt es deshalb einen Morphismus $\mathcal{R}_{d,a\oplus b}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
 p_1(\mathcal{R}_{d,a\oplus b}[\Phi_d]) &= \mathcal{R}_{d,a}[\Phi_d] \\
 p_2(\mathcal{R}_{d,a\oplus b}[\Phi_d]) &= \mathcal{R}_{d,b}[\Phi_d] .
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Nun drängt sich die Frage auf, warum diese ‘‘Konstruktion’’ für die Beschreibung eines Objektes $\Phi_{\bar{a}}$ so wichtig ist. Betrachten wir dazu den Skalenwechsel

$$\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}} : \Phi_a \longrightarrow \Phi_{\bar{a}} , \tag{4.69}$$

wobei wir abstrakt mit $\Phi_{\bar{a}}$ die Kodomäne von $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ bezüglich der Domäne Φ_a bezeichnen.

Da die Wirkung von $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ von Element zu Element eines Objektes unterschiedlich ist (4.44), betrachten wir jetzt die Wirkung auf ein Element $\phi_a^\iota \in \Phi_a$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}[\phi_a^\iota] &= \phi_{\bar{a}^\iota}^\iota \\
 \Rightarrow \tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}[\phi_a^\iota] &= \mathcal{R}_{a,\bar{a}^\iota}[\phi_a^\iota] .
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Zur Erinnerung: die Skalen \bar{a} sind *baumabhängig*. Der Index ι identifiziert dabei die jeweiligen Skalen \bar{a}^ι mit dem dazugehörigen Element ϕ_a^ι .

Hier wird noch einmal klar, daß sich die Abbildung $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ von Charakter zu Charakter unterscheidet.

Für die Wirkung von $\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}$ auf das gesamte Objekt $\Phi_{\bar{a}}$ können wir folgenden Ansatz machen:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}} : \Phi_a \longrightarrow \bigoplus_{\iota} \Phi_{\bar{a}^\iota} , \tag{4.71}$$

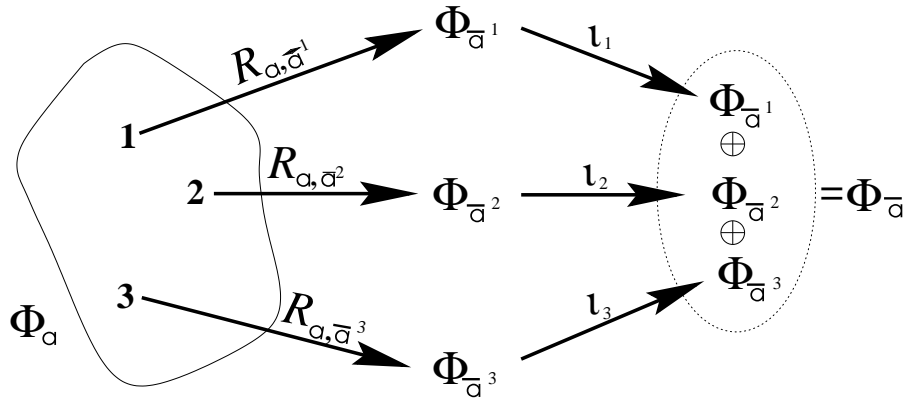
also

$$\Phi_{\bar{a}} := \bigoplus_{\iota} \Phi_{\bar{a}^\iota} . \tag{4.72}$$

Dazu gehören folgende Injektionen und Projektoren:

$$\begin{aligned}
 i_\iota : \Phi_{\bar{a}^\iota} &\longrightarrow \Phi_{\bar{a}} \\
 p_\iota : \Phi_{\bar{a}} &\longrightarrow \Phi_{\bar{a}^\iota} .
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Somit haben wir folgende Situation:



(4.74)

Fassen wir noch einmal die Notwendigkeit der additiven Struktur zusammen: Die Kategorie Φ soll uns eine theorieunabhängige Formulierung von Renormierung ermöglichen. Die Objekte von Φ , zunächst ohne additive Struktur betrachtet, sind Mengen, die alle Charaktere, die durch eine definierende Skala charakterisiert sind, zusammenfassen. Ein Objekt kann man also als eine Sammlung aller Theorien betrachten, die durch eine Variable, zum Beispiel $a \in \mathcal{A}$, beschrieben werden. Die Morphismen der Kategorie entsprechen dabei der Wirkung von Renormierungsschemata. Ohne additive Struktur entspricht die Wirkung der Morphismen allerdings nur der Wirkung baumunabhängiger Skalenwechsel. Wollen wir auch allgemeine Renormierungsabbildungen, zum Beispiel R_{MS} , als Grundlage für einen Morphismen $\mathcal{R}_{a, \bar{a}}$ zulassen, so passiert folgendes: Jedes Element eines Objektes wird durch die Wirkung von $\mathcal{R}_{a, \bar{a}}$ in ein eigenes Objekt abgebildet (siehe 4.74). Das Bild des “Morphismus” $\mathcal{R}_{a, \bar{a}}$ wäre also über mehrere Objekte verstreut. Da aber ein Morphismus gerade ein Objekt auf ein anderes Objekt mit fester Domäne und Kodomäne abbildet, ist das Zielobjekt gerade die direkte Summe der einzelnen Bildobjekte von $\mathcal{R}_{a, \bar{a}}$, $\Phi_{\bar{a}}$.

Bemerkung: Eine erneute Wirkung eines solchen an R_{MS} angelehnten Morphismus $\mathcal{R}_{\bar{a}, \bar{a}}$ existiert aufgrund der Ergebnisse aus (4.47, 4.52) nicht. Es existieren nur die inversen Morphismen $\mathcal{R}_{\bar{a}, a}$, wie wir später diskutieren werden (4.78).

Betrachten wir (4.70) etwas genauer, so gilt für $\tilde{\mathcal{R}}_{a, \bar{a}}$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{a, \bar{a}}[\phi_a^\iota] = i_\iota(\mathcal{R}_{a, \bar{a}^\iota}[\phi_a^\iota]) \quad , \quad (4.75)$$

wodurch wir den abstrakten Morphismus $\tilde{\mathcal{R}}_{a, \bar{a}}$ wie folgt definieren können:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{a, \bar{a}} := \sum_\iota (i_\iota \circ \mathcal{R}_{a, \bar{a}^\iota}) \circ \delta_\iota \quad , \quad (4.76)$$

wobei ι durch die Mächtigkeit des Objekts und der Index “ a ” durch die Skala des Objekts definiert wird, und δ_ι die Abbildung

$$\delta_\iota(\phi_a^\kappa) = \begin{cases} 1, & \kappa = \iota \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad (4.77)$$

ist.

Werfen wir noch einen Blick auf den inversen Morphismus. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_{a, \bar{a}}^{-1}[\tilde{\mathcal{R}}_{a, \bar{a}}[\phi_a^\iota]] &= (\mathcal{R}_{\bar{a}^\iota, a} \circ p_\iota) \circ (i_\iota \circ \mathcal{R}_{a, \bar{a}^\iota})[\phi_a^\iota] \\ &= \mathcal{R}_{\bar{a}^\iota, a} \circ ((p_\iota \circ i_\iota) \circ \mathcal{R}_{a, \bar{a}^\iota})[\phi_a^\iota] \\ &= (\mathcal{R}_{\bar{a}^\iota, a} \circ \mathcal{R}_{a, \bar{a}^\iota})[\phi_a^\iota] \\ &= \phi_a^\iota \quad . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Somit können wir definieren:

$$\tilde{\mathcal{R}}_{a,\bar{a}}^{-1} := \sum_{\iota} (\mathcal{R}_{\bar{a}^{\iota},a} \circ p_{\iota}) \circ \delta_{\iota} . \quad (4.79)$$

Wir sind sogar in der Lage, einen abstrakten Morphismus $\tilde{\mathcal{R}}$ (4.50) einzuführen:

$$\tilde{\mathcal{R}} := \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} (i_{\iota} \circ \mathcal{R}_{a,\bar{a}^{\iota}}) \circ \delta_{\iota}^a , \quad (4.80)$$

wobei

$$\delta_{\iota}^a(\phi_b^{\kappa}) = \begin{cases} 1, & \kappa = \iota \text{ und } a = b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.81)$$

Für seine Inverse gilt:

$$\tilde{\mathcal{R}}^{-1} := \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} (\mathcal{R}_{\bar{a}^{\iota}} \circ p_{\iota}) \circ \delta_{\iota}^{\bar{a}} . \quad (4.82)$$

Überzeugen wir uns von der inversen Eigenschaft des Morphismus $\tilde{\mathcal{R}}^{-1}$:

$$\tilde{\mathcal{R}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{R}} = \left(\sum_{b \in \mathfrak{Q}} \sum_{\kappa=1}^{\#\Phi_{\bar{b}}} (\mathcal{R}_{\bar{b}^{\kappa}} \circ p_{\kappa}) \circ \delta_{\kappa}^{\bar{b}} \right) \circ \left(\sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} (i_{\iota} \circ \mathcal{R}_{a,\bar{a}^{\iota}}) \circ \delta_{\iota}^a \right) \quad (4.83)$$

$$= \sum_{b \in \mathfrak{Q}} \sum_{\kappa=1}^{\#\Phi_{\bar{b}}} \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} \left[((\mathcal{R}_{\bar{b}^{\kappa}} \circ p_{\kappa}) \circ \delta_{\kappa}^{\bar{b}}) \circ ((i_{\iota} \circ \mathcal{R}_{a,\bar{a}^{\iota}}) \circ \delta_{\iota}^a) \right] , \quad (4.84)$$

was natürlich nur dann nichttrivial ist, falls $\bar{b} = \bar{a}$ und $\kappa = \iota$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{\mathcal{R}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{R}} &= \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} ((\mathcal{R}_{\bar{a}^{\iota},a} \circ p_{\iota}) \circ (i_{\iota} \circ \mathcal{R}_{a,\bar{a}^{\iota}}) \circ \delta_{\iota}^a) \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} (\mathcal{R}_{\bar{a}^{\iota},a} \circ (p_{\iota} \circ i_{\iota}) \circ \mathcal{R}_{a,\bar{a}^{\iota}} \circ \delta_{\iota}^a) \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} ((\mathcal{R}_{\bar{a}^{\iota},a} \circ \mathcal{R}_{a,\bar{a}^{\iota}}) \circ \delta_{\iota}^a) \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} (\text{id}_{\bar{a}^{\iota}} \circ \delta_{\iota}^a) . \end{aligned} \quad (4.85)$$

Das bedeutet, daß

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{R}}[\phi_h^{\zeta}] &= \sum_{a \in \mathfrak{Q}} \sum_{\iota=1}^{\#\Phi_{\bar{a}}} (\text{id}_{\bar{a}^{\iota}} \circ \delta_{\iota}^a) [\phi_h^{\zeta}] \\ &= (\text{id}_{\bar{h}^{\zeta}}) [\phi_h^{\zeta}] \\ &= \phi_h^{\zeta} \quad \forall \phi_h^{\zeta} \in \Phi_h . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Somit ist $\tilde{\mathcal{R}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{R}}$ der Identitätsmorphus für jedes Objekt $\Phi_h \in \mathbf{Ob}(\Phi)$:

$$\tilde{\mathcal{R}}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{R}}[\Phi_h] = \Phi_h . \quad (4.87)$$

Da die Kategorie ϕ jetzt zusätzlich zu einer k -linearen noch eine additive Struktur trägt, erweitert sich das Tensorprodukt \boxtimes zu einem Tensorprodukt additiver Kategorien, \boxtimes .

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, daß die additive Struktur von Φ einen aus Sicht von Renormierung sinnvollen Hintergrund hat. Sie ermöglicht es, Objekte und Morphismen zu definieren, um die Wirkung allgemeiner Renormierungsabbildungen (in unserem Falle R_{MS}) kategorientheoretisch als Morphismen zu beschreiben. Diese Interpretation der additiven Struktur von Φ rundet nun die kategorientheoretische Interpretation von Renormierung ab, sofern es sich um die Klassifizierung der an dem Renormierungsvorgang beteiligten mathematischen Objekte handelt. Mit der Kategorie Φ haben wir eine Klassifikation der Charaktere von \mathcal{H}_R und der zugehörigen Renormierungsabbildungen gefunden. Den Renormierungsvorgang selbst konnten wir bis zu diesem Punkt noch nicht implementieren. In Kapitel 3.6 wird beschrieben, wie wir mit Hilfe einer Gruppenstruktur auf dem Raum der Charaktere von \mathcal{H}_R den Renormierungsvorgang algebraisch beschreiben können, wobei wir die Gruppe von Charaktere mit G_R bezeichnet haben. Um die Gruppenstruktur von G_R zu kategorifizieren, müssen wir zunächst ein monoidales Produkt auf der Kategorie Φ einführen, um eine Produktstruktur zu erhalten.

4.4 Die monoidale Kategorie Φ

Wie in der Einleitung zu 4 erwähnt, soll das monoidale Produkt eine Asymmetrie besitzen. Es soll erreicht werden, daß das linke zu multiplizierende Objekt der Wirkung eines Morphismus unterliegt.

Inhaltlich haben wir uns in den letzten Kapiteln bereits mit den Morphismen und deren Verhältnis zu Skalenwechseln beschäftigt. Die Morphismen von Φ entsprachen dabei den Pullbacks der Skalenwechsel des Polynomraumes V . Die baumabhängigen Skalenwechsel \tilde{R} sind dabei keine Algebrenhomomorphismen, sondern erfüllen, wie ihre "Ebenbilder" R_{MS} , die sogenannten Multiplikationsbedingungen (3.57). Die mit \tilde{R} durch einen Pullback verbundenen Morphismen $\tilde{\mathcal{R}}$ müssen demnach dieselben Multiplikationsbedingungen für das monoidale Produkt erfüllen.

Betrachten wir noch einmal einen baumabhängigen Skalenwechsel \tilde{R} :

$$\tilde{R}[\phi_a^1(t_1)\phi_a^2(t_2)] \neq \tilde{R}[\phi_a^1(t_1)]\tilde{R}[\phi_a^2(t_2)] \neq \tilde{R}[\tilde{R}[\phi_a^1(t_1)]\phi_a^2(t_2)] . \quad (4.88)$$

Diese Eigenschaft von \tilde{R} wollen wir bei der Definition des asymmetrischen Produktes im Gedächtnis behalten.

Doch zunächst wollen wir ein monoidales Produkt definieren:

$$\begin{aligned} \otimes : \Phi \boxtimes \Phi &\longrightarrow \Phi \\ \Phi_a \boxtimes \Phi_b &\longmapsto \Phi_{a*b} . \end{aligned} \quad (4.89)$$

Auf der Stufe der Elemente ist dieses Produkt folgendermaßen definiert:

$$(\phi_a \otimes \phi_b)(t) = \phi_a(t')\phi_b(t'') . \quad (4.90)$$

Dieses Produkt ist natürlich assoziativ!

Notation: Im weiteren Verlauf werden wir einen allgemeinen Charakter aus einem Objekt Φ_a als ϕ_a bezeichnen. Ist jedoch die individuelle Theorie, also das individuelle Element, eines Objektes Φ_a wesentlich für die Aussage, verwenden wir weiterhin die Schreibweise $\phi_a^k \in \Phi_a$.

Unser Ziel war es aber, das Produkt so zu modifizieren, daß es eine Asymmetrie bezüglich des auf der linken Seite multiplizierten Objekts besitzt. Wir definieren deshalb noch ein Produkt

$$\otimes_{\mathcal{R}} : \Phi \boxtimes \Phi \longrightarrow \Phi \quad (4.91)$$

$$\Phi_a \boxtimes \Phi_b \longmapsto \begin{cases} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \phi_b, & \text{falls } \text{dom}(\mathcal{R}) = \Phi_a \\ \Phi_a \otimes \Phi_b, & \text{sonst} \end{cases} , \quad (4.92)$$

welches zusätzlich noch \mathcal{R} -linear ist, also

$$\begin{aligned} \otimes_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}[\Phi_a \boxtimes \Phi_b] \right) &= \mathcal{R} \left[\otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_a \boxtimes \Phi_b) \right] \\ &= \mathcal{R}[\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b] . \end{aligned} \quad (4.93)$$

Dazu sind natürlich noch Erklärungen nötig. Der verwendete Morphismus \mathcal{R} ist hierbei ein beliebiges aber festes Element aus $\mathbf{Mor}(\Phi)$. \mathcal{R} kann sowohl ein baumunabhängiger Morphismus, zum Beispiel $\mathcal{R}_{a,b}$, als auch ein baumabhängiger Morphismus $\tilde{\mathcal{R}}$ sein. Die sich daraus ergebenden Strukturen werden aufgrund der Wahl des Morphismus \mathcal{R} entweder strikt oder nichttrivial sein. Im folgenden gehen wir von dem Fall aus, daß \mathcal{R} baumabhängig sein kann, also $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}$, so daß gilt:

$$\mathcal{R}(\Phi_a \otimes \Phi_b) \neq \mathcal{R}(\Phi_a) \otimes \mathcal{R}(\Phi_b) \neq \mathcal{R}(\mathcal{R}(\Phi_a)\Phi_b) . \quad (4.94)$$

Ist \mathcal{R} dabei baumunabhängig, so ist diese Beziehung trivial. Wir gehen im folgenden jedoch vom nichttrivialen Fall aus. In diesem Fall verletzt das Produkt $\otimes_{\mathcal{R}}$ die Assoziativität, denn es gilt

$$\begin{aligned} (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c &\neq \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \\ \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \otimes \Phi_c &\neq \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \Phi_c , \end{aligned} \quad (4.95)$$

was man sehr gut auf der Stufe der Elemente sieht

$$R[R[\phi_a(t')]\phi_b(t'')]\phi_c(t''') \neq R[\phi_a(t')]R[\phi_b(t'')]\phi_c(t''') . \quad (4.96)$$

Betrachten wir uns als Beispiel den Skalenwechsel \tilde{R} mit den Eigenschaften:

$$\tilde{R}[\tilde{R}[\phi_a(t')]\phi_b(t'')]\phi_c(t''') \neq \tilde{R}[\phi_a(t')]\tilde{R}[\phi_b(t'')]\phi_c(t''') , \quad (4.97)$$

da

$$\begin{aligned} \tilde{R}[\tilde{R}[\phi_a(t')]\phi_b(t'')]\phi_c(t''') &= \tilde{R}[R_{a,\bar{a}}[\phi_a(t')]\phi_b(t'')]\phi_c(t''') \\ &= R_{(a,b),(\bar{a},\bar{b})}[\phi_{\bar{a}}(t')\phi_b(t'')]\phi_c(t''') \\ &\neq R_{a,\bar{a}}[\phi_a(t')]\phi_b(t'')\phi_c(t''') \\ &= \tilde{R}[\phi_a(t')]\tilde{R}[\phi_b(t'')]\phi_c(t''') . \end{aligned} \quad (4.98)$$

Somit haben wir eine monoidale Struktur definiert, die (im allgemeinen) die Assoziativität verletzt. Diese Verletzung der Assoziativität zwingt uns aber, natürliche Isomorphismen zu definieren, die diesen Defekt "reparieren",

Wir benötigen demnach noch

- einen Assoziator $a : (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \longrightarrow \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c)$
- ein Eins-Objekt I
- jeweils eine links- und rechts-Einsabbildung.

Wir definieren deshalb ersteinmal einen Assoziator

$$a := (\text{id} \boxtimes \mathcal{R} \boxtimes \text{id}) \circ (\mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id}) , \quad (4.99)$$

der natürlich noch die Pentagongleichung (2.26) erfüllen muß.

Das Einsobjekt bezüglich $\otimes_{\mathcal{R}}$ ist unser Objekt I . Jedes Element $I \in I$ wirkt wie folgt auf einen Baum t :

$$I(t) = \varepsilon(t)\mathbf{1} = \varepsilon(t) . \quad (4.100)$$

Darum gilt:

$$I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \cong \Phi_a , \quad (4.101)$$

denn

$$I \otimes_{\mathcal{R}} \phi_a(t) = I \otimes \phi_a(t) \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} &= \phi_a(\varepsilon(t')t'') \\ &= \phi_a(t) . \end{aligned} \quad (4.103)$$

Also ist die links-Einsabbildung trivial

$$l = \text{id} . \quad (4.104)$$

Wie sieht es mit der rechts-Einsabbildung aus?

$$\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I = \mathcal{R}[\Phi_a] \quad (4.105)$$

mit äquivalenter Rechnung wie oben.

Daraus folgt für die rechts-Einsabbildung

$$r = \mathcal{R}^{-1} . \quad (4.106)$$

Alle soeben definierten natürlichen isomorphismen , also a, l, r , sollen \mathcal{R} -linear sein, also

$$a\left(\mathcal{R}[\dots \otimes_{\mathcal{R}} \dots \otimes_{\mathcal{R}} \dots]\right) = \mathcal{R}\left[a(\dots \otimes_{\mathcal{R}} \dots \otimes_{\mathcal{R}} \dots)\right] , \quad (4.107)$$

was natürlich ebenso für l, r gilt.

Somit haben wir alle natürlichen Isomorphismen für die Definition einer monoidalen Kategorie 2.3.1 zusammen und können nun definieren:

Satz 4.4.1. *Das Tupel $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, I, a, l, r)$ ist eine monoidale Kategorie.*

Beweis:

Zuerst beweisen wir die Pentagongleichung (2.26) für den Assoziator, also

$$\begin{array}{ccc} (\phi \otimes_{\mathcal{R}} (\phi \otimes_{\mathcal{R}} \phi)) \otimes_{\mathcal{R}} \phi & \xleftarrow{a_{\phi, \phi, \phi} \boxtimes \text{id}} & ((\phi \otimes_{\mathcal{R}} \phi) \otimes_{\mathcal{R}} \phi) \otimes_{\mathcal{R}} \phi \\ \downarrow a_{\phi, \phi} \boxtimes \phi, \phi & & \downarrow a_{\phi} \boxtimes \phi, \phi, \phi \\ \phi \otimes_{\mathcal{R}} ((\phi \otimes_{\mathcal{R}} \phi) \otimes_{\mathcal{R}} \phi) & \xrightarrow{\text{id} \boxtimes a_{\phi, \phi, \phi}} & \phi \otimes_{\mathcal{R}} (\phi \otimes_{\mathcal{R}} (\phi \otimes_{\mathcal{R}} \phi)) \end{array} \quad (4.108)$$

Beweisen wir zunächst einmal den “linken” Weg

$$\begin{aligned} & a_{\phi_a, \phi_b, \phi_c} \left[((\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_d \right] \\ &= (\text{id} \boxtimes \mathcal{R} \boxtimes \text{id}) \circ (\mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id}) \left(\mathcal{R}[\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \otimes \Phi_c] \right) \otimes \Phi_d \\ &= \mathcal{R} \left[(\text{id} \boxtimes \mathcal{R} \boxtimes \text{id}) \circ (\mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id}) (\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \otimes \Phi_c) \right] \otimes \Phi_d \\ &= \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \Phi_c] \otimes \Phi_d \\ &= (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c)) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_d \\ &\xrightarrow{a_{\Phi, \Phi} \boxtimes \Phi, \Phi} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \Phi_c] \otimes \Phi_d \\ &\xrightarrow{\text{id} \boxtimes a_{\Phi, \Phi, \Phi}} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \mathcal{R}[\Phi_c] \otimes \Phi_d \\ &= \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_c \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_d)) . \end{aligned} \quad (4.109)$$

Der erste Schritt des Beweises wurde ausführlich ausgeführt, wobei bei den darauffolgenden Schritten nur jeweils die Lösungen angegeben werden. Das Prozedere dabei ist völlig identisch mit dem des ersten Schrittes.

Den Beweis des “rechten” Weges führen wir in analoger Weise

$$\begin{aligned}
& ((\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_d & (4.110) \\
& = \mathcal{R}[\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \otimes \Phi_c] \otimes \Phi_d \\
& \xrightarrow{a_{\Phi \boxtimes \Phi, \Phi, \Phi}} \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \otimes (\mathcal{R}[\Phi_c] \otimes \Phi_d) \\
& \xrightarrow{a_{\Phi, \Phi, \Phi \boxtimes \Phi}} R[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \mathcal{R}[\Phi_c] \otimes \Phi_d \\
& = \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_c \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_d)) .
\end{aligned}$$

Somit ist die Pentagongleichung (2.26) erfüllt.

Bleibt also nur noch das Dreiecksaxiom (2.28) zu überprüfen, das durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b & \xrightarrow{a_{\Phi, I, \Phi}} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& \searrow r \boxtimes \text{id} & \swarrow \text{id} \boxtimes l \\
& & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b
\end{array} \quad (4.111)$$

beschrieben wird.

Den Beweis starten wir “oben links” und gehen den “rechten” Weg:

$$\begin{aligned}
& (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b = \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes I] \otimes \Phi_b & (4.112) \\
& \xrightarrow{a_{\Phi, I, \Phi}} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes (\mathcal{R}[I] \otimes \Phi_b) \\
& = \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes (I \otimes \Phi_b) \\
& \xrightarrow{\text{id} \boxtimes l} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b \\
& = \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b
\end{aligned}$$

und vergleichen mit dem “linken”:

$$\begin{aligned}
& (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b = \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes I] \otimes \Phi_b & (4.113) \\
& \xrightarrow{r \boxtimes \text{id}} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b \\
& = \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b ,
\end{aligned}$$

was mit dem Ergebnis des “rechten” Weges übereinstimmt.

Somit haben wir gezeigt, daß $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, I, a, l, r)$ eine monoidale Kategorie ist. \square

Wir wollen versuchen, die monoidale Struktur von Φ aus Sicht von Renormierung zu interpretieren. Die “Produktstruktur” ist notwendig, damit wir den Renormierungsvorgang kategorientheoretisch beschreiben können. Für die algebraische Beschreibung von Renormierung benötigen wir eine Gruppenstruktur auf den Charakteren von \mathcal{H}_R . Wesentlich ist bei der gruppentheoretischen Beschreibung des Renormierungsvorganges das Produkt und die Inversionsabbildung der Gruppenstruktur.

Das “Produkt” $\otimes_{\mathcal{R}}$ unserer monoidalen Kategorie Φ entspricht in seinen Grundzügen dem Gruppenprodukt $*$ der Gruppe G_R . $\otimes_{\mathcal{R}}$ leistet aber noch mehr: $\otimes_{\mathcal{R}}$ implementiert die Wirkung eines Morphismus, also indirekt die Wirkung eines Skalenwechsels, in das Produkt. Die Wirkung des Morphismus vollzieht sich dabei auf das linke zu “multiplizierende” Objekt. Diese Asymmetrie finden wir auch bei der Abbildung Γ (3.126) wieder, die den Renormierungsprozeß im Rahmen der Gruppe G_R beschreibt. Ohne diese Asymmetrie wäre die Wirkung von Γ trivial.

Das bedeutet, daß ein kategorifiziertes Äquivalent von Γ in der monoidalen Struktur von Φ automatisch nichttriviale Ergebnisse liefern wird. Wir erkaufen diese Freiheit jedoch auf Kosten der Assoziativität des monoidalen Produktes. Durch die Angabe eines Assoziators sowie den Einsbedingungen ist diese Verletzung aber *strukturkonform*, also entspricht die Verletzung der Definition einer monoidalen Kategorie. Darüber hinaus liefern uns der Assoziator und die Einsbedingungen zusätzliche Strukturen.

Um die Abbildung Γ kategorifizieren zu können, brauchen wir jedoch noch die Kategorifizierung einer Inversionsabbildung, was wir in den nächsten Kapiteln erarbeiten wollen. Doch bevor wir mit den Definitionen fortfahren, wollen wir noch einmal kurz eine alternative Formulierung des Einselementes I geben: Erinnern wir uns an die Formulierung einer Algebra, wie sie zur Definition von Hopfalgebren üblich ist [24, 35]. Das Einselement wurde dabei durch eine lineare Abbildung η beschrieben. In Kapitel 2.6 haben wir gesehen, wie diese Formulierung ein kategorientheoretisches Äquivalent in Form eines Funktors $\Lambda : \mathbf{vec} \longrightarrow \phi$ bekommen hat.

Wir definieren also einen k -linearen Funktor

$$\Lambda : \mathbf{vec} \longrightarrow \phi \quad (4.114)$$

$$k \longmapsto I , \quad (4.115)$$

wobei Λ wie folgt auf k wirkt:

$$\lambda \longmapsto \lambda \mathbf{1} \circ \varepsilon \in I . \quad (4.116)$$

Somit haben wir die Grundlage für die Definition einer bimonoidalen Kategorie geschaffen. Doch bevor wir eine bimonoidale Struktur angeben können, müssen wir zuerst eine komonoidale Struktur definieren.

4.5 Die 2-Koalgebra Φ

Wie im letzten Kapitel angesprochen, wollen wir eine Kategorifizierung der Abbildung Γ definieren. Dazu benötigen wir eine Inverse bezüglich unseres monoidalen Produktes $\otimes_{\mathcal{R}}$. Wenn wir die Inverse einer Gruppe in Form eines Diagrammes definieren wollen, benötigen wir eine Diagonalabbildung δ , die jedem Gruppenelement g das Bild $\delta(g) = g \times g$ zuordnet [21].

Für die Definition einer Inversen bezüglich unseres monoidalen Produktes $\otimes_{\mathcal{R}}$ benötigen wir demnach noch ein komonoidales Produkt, das wir mit ∇_R bezeichnen wollen.

In diesem Kapitel wollen wir nun eine komonoidale Struktur auf der Kategorie Φ definieren. Wir beginnen zuerst mit der Definition der Funktoren und natürlichen Transformationen, die wir für die Definition einer komonoidalen Kategorie benötigen (2.6), und beweisen dann die komonoidale Struktur von Φ .

Was wir zunächst brauchen ist ein k -linearer Funktor

$$\nabla_R : \Phi \longrightarrow \Phi \boxtimes \Phi , \quad (4.117)$$

den wir wie folgt definieren:

$$\nabla_R : \Phi_a \longmapsto \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a . \quad (4.118)$$

Dieser Funktor soll wiederum \mathcal{R} -linear sein, also

$$\nabla_R(\mathcal{R}[\Phi_a]) = \mathcal{R}[\nabla_R(\Phi_a)] . \quad (4.119)$$

Das so definierte komonoidale Produkt ∇_R besitzt wie $\otimes_{\mathcal{R}}$ ebenfalls eine asymmetrische Struktur, die durch eine linksseitige Wirkung eines Morphismus \mathcal{R} gegeben ist.

Im Fall $\otimes_{\mathcal{R}}$ führte diese Asymmetrie zur Verletzung der Assoziativität. Wir erwarten deshalb eine Verletzung der Koassoziativität durch das komonoidale Produkt ∇_R .

Betrachten wir

$$\begin{aligned} (\nabla_R \boxtimes \text{id}) \circ \nabla_R &\neq (\text{id} \boxtimes \nabla_R) \circ \nabla_R \\ \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \Phi_a &\neq \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a . \end{aligned} \quad (4.120)$$

Um die verletzte Koassoziativität zu reparieren, benötigen wir einen Koassoziator α mit folgender Eigenschaft:

$$\alpha : \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a \longrightarrow \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \Phi_a . \quad (4.121)$$

Da eine bimonoidale Kategorie “dual” zu einer monoidalen Kategorie ist, erwarten wir für den Koassoziator α eine ähnliche Struktur wie für den Assoziator a des monoidalen Produktes $\otimes_{\mathcal{R}}$. In der Tat ist α “dual” zu a , denn wir definieren:

$$\alpha := (\mathcal{R}_{\boxtimes} \boxtimes \text{id}) \circ (\text{id} \boxtimes \mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id}) . \quad (4.122)$$

Als Pendant zum Einsfunktör Λ der monoidalen Struktur benötigen wir noch einen *Koeinsfunktör* Υ . Auch hier erwarten wir eine “Dualität” zu dem Einsfunktör Λ der monoidalen Kategorie Φ . “Dual” ist hierbei immer als Dualität im Sinne von Kategorien zu verstehen, also das Umdrehen der Pfeile in den Diagrammen, die eine Kategorie definieren.

Wir definieren einen *Koeinsfunktör*

$$\begin{aligned} \Upsilon : \Phi &\longrightarrow \mathbf{vec} \\ I &\longmapsto k , \end{aligned} \quad (4.123)$$

der wie folgt auf die Elemente der Kategorie wirkt

$$\begin{aligned} \Upsilon : \Phi_a &\longrightarrow k \\ \phi_a &\longmapsto \phi_a(e) \in k . \end{aligned} \quad (4.124)$$

Υ ist dabei wieder als R -lineare Abbildung definiert. Allerdings hat ein Skalenwechsel \mathcal{R} auf k keinerlei Wirkung, $\mathcal{R}(\Upsilon(\Phi_a)) = \Upsilon(\Phi_a)$. Da das komonoidale Produkt ∇_R die Koassoziativität verletzt, werden wir natürliche Transformationen λ, ϱ definieren müssen, die die Koeinseigenschaft für Υ sicherstellen.

Wir definieren deshalb

$$\begin{aligned} \lambda : (\Upsilon \boxtimes \text{id}) \circ \nabla_R &\longrightarrow \widehat{\otimes}^{-1} \\ \varrho : (\text{id} \boxtimes \Upsilon) \circ \nabla_R &\longrightarrow \widehat{\otimes}^{-1} , \end{aligned} \quad (4.125)$$

also

$$\begin{aligned} \lambda : ((\Upsilon \boxtimes \text{id}) \circ \nabla_R)(\Phi_a) &= (\Upsilon(\Phi_a) \boxtimes \Phi_a) \longrightarrow k \boxtimes \Phi_a \\ \varrho : ((\text{id} \boxtimes \Upsilon) \circ \nabla_R)(\Phi_a) &= (\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Upsilon(\Phi_a)) \longrightarrow \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes k . \end{aligned} \quad (4.126)$$

Offensichtlich gilt

$$\lambda := \text{id} . \quad (4.127)$$

Da aber in der zweiten Gleichung ein $\mathcal{R}[\Phi_a]$ erscheint, definieren wir

$$\varrho := \mathcal{R}^{-1} , \quad (4.128)$$

da

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\Phi] \boxtimes \Upsilon(\Phi) &= \mathcal{R}[\Phi] \boxtimes k \\ &= \mathcal{R}[\Phi] \\ &\xrightarrow{\varrho} \Phi \\ &= \Phi \boxtimes k . \end{aligned} \quad (4.129)$$

Somit haben wir genug Strukturen für folgenden Satz bereitgestellt:

Satz 4.5.1. *Das Tupel $(\Phi, \nabla_R, \Upsilon, \lambda, \varrho)$ ist eine 2-Koalgebra, oder auch komonoidale Kategorie genannt.*

Beweis:

Dazu muß zunächst die Kopentagongleichung (2.69) bewiesen werden. Dieser Beweis ist trivial, da der Koassoziator gerade der “dualisierte” Assoziator ist, was bedeutet, daß lediglich die Pfeile der

Pentagongleichung (2.26) umgedreht worden sind. Vergleichen wir den Koassoziator $\alpha = (\mathcal{R} \boxtimes \text{id}) \circ (\text{id} \boxtimes \mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id})$ mit dem Assoziator $a := (\text{id} \boxtimes \mathcal{R} \boxtimes \text{id}) \circ (\mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id})$, so erkennt man die “duale” Struktur.

Betrachten wir unter dem Gesichtspunkt der dualen Struktur die Kopentagongleichung. Da die einzelnen Schritte des Beweises identisch mit den Schritten der Pentagongleichung sind, geben wir nur das zu beweisende Diagramm an. Die Beweisschritte sind analog der der Pentagongleichung:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a & \xrightarrow{\alpha_{\Phi, \Phi, \Phi \boxtimes \Phi}} & \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a & (4.130) \\
\downarrow \text{id} \boxtimes \alpha_{\Phi, \Phi, \Phi} & & \downarrow \alpha_{\Phi \boxtimes \Phi, \Phi, \Phi} & \\
\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \Phi_a & & & \\
\downarrow \alpha_{\Phi, \Phi \boxtimes \Phi, \Phi} & & & \\
\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \Phi_a & \xrightarrow{\alpha_{\Phi, \Phi, \Phi} \boxtimes \text{id}} & \mathcal{R}[\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \Phi_a] \boxtimes \Phi_a &
\end{array}$$

was offensichtlich erfüllt ist.

Für $\Upsilon, \lambda, \varrho$ ist der Beweis des Dreieckaxioms etwas trickreicher.

Zu Beweisen ist:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes (\Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a]) \boxtimes \Phi_a) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Upsilon(\Phi_a)] \boxtimes \Phi_a & (4.131) \\
\searrow \text{id} \boxtimes \lambda & & \swarrow \varrho \boxtimes \text{id} & \\
& \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a & &
\end{array}$$

Starten wir dazu oben links mit dem “rechten Weg”:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes (\Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a]) \boxtimes \Phi_a) & (4.132) \\
& = \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes (\mathcal{R}[\Upsilon(\Phi_a)] \boxtimes \Phi_a) \\
& \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Upsilon(\Phi_a)] \boxtimes \Phi_a \\
& = \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes k] \boxtimes \Phi_a \\
& \xrightarrow{\varrho \boxtimes \text{id}} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a .
\end{aligned}$$

Für den “linken Weg” erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes (\Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a]) \boxtimes \Phi_a) & (4.133) \\
& = \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes (k \boxtimes \Phi_a) \\
& \xrightarrow{\text{id} \boxtimes \lambda} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a .
\end{aligned}$$

Mithin ist $(\Phi, \nabla_R, \Upsilon, \lambda, \varrho)$ eine 2-Bialgebra. \square

Also haben wir auf Φ sowohl eine monoidale als auch eine komonoidale Struktur definiert. Die komonoidale Kategorie gibt uns die Möglichkeit einer Diagonalisierung der Kategorie Φ , wobei modifiziert, analog der Bedeutung dieses Begriffes bei dem monoidalen Produkt $\otimes_{\mathcal{R}}$, hierbei als asymmetrische Wirkung eines Morphismus zu verstehen ist.

Bis jetzt haben wir lediglich zwei disjunkte Strukturen, nämlich eine monoidale und eine komonoidale, auf Φ definiert. Zur kategorientheoretischen Beschreibung von Renormierung benötigen wir allerdings sowohl das “Produkt” $\otimes_{\mathcal{R}}$ als auch das “Koprodukt” ∇_R . Demnach müssen beide

disjunkten Strukturen $(\Phi, \otimes, \Lambda, a, l, r)$ und $(\Phi, \nabla_R, \Upsilon, \alpha, \lambda, \varrho)$ zu einer bimonoidalen Struktur verschmelzen.

Im nächsten Kapitel wollen wir die natürlichen Transformationen für die Verschmelzung einer monoidalen und komonoidalen Kategorie zu einer bimonoidalen Kategorie definieren und die bimonoidale Struktur beweisen.

4.6 Die 2-Bialgebra Φ

Bei einer bimonoidalen Struktur für Φ wollen wir erreichen, daß wir sowohl eine monoidale als auch eine komonoidale Struktur auf Φ besitzen, “diagonalisieren” und wieder “multiplizieren” können, was notwendig für die Kategorifizierung der Abbildung $\Gamma(g) = g_R^{-1}g$ der Gruppe G_R ist. Erst durch die Kategorifizierung von Γ erreichen wir eine kategorientheoretische Beschreibung von Renormierung.

Bei der Bildung einer bimonoidalen Struktur haben wir darauf zu achten, daß die bimonoidale und die monoidale Struktur ein “verträgliches Zusammenleben führen”, also daß sich die beiden Strukturen gegenseitig respektieren. Die Verträglichkeit einer monoidalen und einer bimonoidalen Kategorie wird durch vier natürliche Isomorphismen beschrieben, die zwölf Bedingungen (2.6) erfüllen müssen. Wir “tasten” uns deshalb erst einmal vorsichtig an die natürlichen Isomorphismen heran, bevor wir den Beweis der zwölf Diagramme angehen.

Beginnen wir mit der Tatsache, daß unser komonoidales Produkt ∇_R kein monoidaler Funktor ist. Diese Tatsache soll durch eine natürliche Transformation Ξ “repariert” werden. Dies bedeutet, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi & \xrightarrow{\nabla_R} & \Phi \boxtimes \Phi \\
 \uparrow \otimes_{\mathcal{R}} & \nearrow \Xi & \uparrow \otimes_{\mathcal{R}} \boxtimes \otimes_{\mathcal{R}} \circ (id \boxtimes \tau \boxtimes id) \\
 \Phi \boxtimes \Phi & \xrightarrow{\nabla_R \boxtimes \nabla_R} & (\Phi \boxtimes \Phi) \boxtimes (\Phi \boxtimes \Phi)
 \end{array} \tag{4.134}$$

Gehen wir zunächst von unten links nach oben rechts erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \Phi_a \boxtimes \Phi_b \tag{4.135} \\
 \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{R}}} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b = \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b \\
 \xrightarrow{\nabla_R} & \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b .
 \end{aligned}$$

Der andere Weg liefert:

$$\begin{aligned}
 & \Phi_a \boxtimes \Phi_b \tag{4.136} \\
 \xrightarrow{\nabla_R \boxtimes \nabla_R} & (R[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a) \boxtimes (R[\Phi_b] \boxtimes \Phi_b) \\
 \xrightarrow{id \boxtimes \tau \boxtimes id} & (R[\Phi_a] \boxtimes R[\Phi_b]) \boxtimes (\Phi_a \boxtimes \Phi_b) \\
 \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{R}} \boxtimes \otimes_{\mathcal{R}}} & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b ,
 \end{aligned}$$

woraus man für die natürliche Transformation Ξ folgern kann

$$\Xi := (\mathcal{R}_{\otimes} \boxtimes id_{\otimes}) \circ (id \otimes \mathcal{R}^{-1} \boxtimes id_{\otimes}) . \tag{4.137}$$

Erinnern wir uns an die Konstruktion einer Bialgebra, so fordert man für die Komultiplikation Δ , daß sie ein Algebrenhomomorphismus ist. Das bedeutet insbesondere, daß $\Delta(1) = 1 \otimes 1$. Vergleichen wir die Eigenschaften des Koproduktes Δ einer Bialgebra mit dem komonoidalen Produkt

∇_R der zu erwartenden bimonoidalen Kategorie Φ so sehen wir, daß α zwar die fehlende Produktverträglichkeit von ∇_R repariert, aber noch keine Aussage über die Wirkung von ∇_R auf das Einsobjekt I macht.

Wir müssen also eine natürliche Transformation Ξ_0 suchen die sicherstellt, daß das komonoidale Produkt ∇_R das Einsobjekt I der monoidalen Struktur respektiert, also daß

$$\Xi_0 : I \boxtimes I \longrightarrow \nabla_R(I) . \quad (4.138)$$

Dabei ist

$$\nabla_R[I] = \mathcal{R}[I] \boxtimes I = I \boxtimes I , \quad (4.139)$$

da \mathcal{R} nicht auf I wirkt.

Somit erhalten wir

$$\Xi_0 := \text{id}_{\boxtimes} . \quad (4.140)$$

Ebenso wie das komonoidale “Produkt” ∇_R muß auch der komonoidale Einsfunctor Υ die monoidale Struktur von Φ respektieren.

Beginnen wir mit dem monoidalen Produkt $\otimes_{\mathcal{R}}$. In einer bimonoidalen Kategorie respektiert der Koeinsfunctor Υ im allgemeinen nicht das Produkt $\otimes_{\mathcal{R}}$, was durch eine natürliche Transformation Θ repariert werden muß. Für die monoidale Struktur von Φ bedeutet das

$$\Theta : \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_b) \longrightarrow \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) . \quad (4.141)$$

Betrachten wir dazu die rechte Seite $\Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b)$. Um eine genaue Vorstellung von der Wirkung von Υ zu bekommen, betrachten wir die rechte Seite der Gleichung auf der Stufe der Elemente $\phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \phi_b \in \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b$:

$$\begin{aligned} & \Upsilon(\phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \phi_b) & (4.142) \\ &= (\mathcal{R}[\phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \phi_b)(e) \\ &= \mathcal{R}[\phi_a](e)\phi_b(e) \\ &= \phi_a(e)\phi_b(e) \\ &= 1 \in k . & (4.143) \end{aligned}$$

Die linke Seite liefert $k \otimes_{\text{vec}} k$. Mithin gilt für Θ :

$$\Theta : k \otimes_{\text{vec}} k \longrightarrow k , \quad (4.144)$$

Was per definitionem des Tensorprodukts von Körpern ein trivialer Isomorphismus ist. Wir bezeichnen ihn mit $\text{id}_{k \otimes}$.

Also gilt

$$\Theta := \text{id}_{k \otimes} . \quad (4.145)$$

Bis jetzt haben wir auch noch keine Aussage darüber gemacht, ob Υ das Einsobjekt I der monoidalen Struktur respektiert. Wir benötigen eine natürliche Transformation

$$\Theta_0 : k \longrightarrow \Upsilon(I) , \quad (4.146)$$

die diese Eigenschaft sicherstellt.

Da aber $\Upsilon(I) = k$ definiert war, gilt

$$\Theta_0 := \text{id}_k . \quad (4.147)$$

Somit haben wir alle natürlichen Transformationen für unsere 2-Bialgebra definiert. Fassen wir der Übersichtlichkeit halber alle vier noch einmal zusammen:

- $\Xi := (\mathcal{R} \boxtimes \text{id}_{\otimes}) \circ (\text{id} \otimes \mathcal{R}^{-1} \boxtimes \text{id}_{\otimes})$
- $\Xi_0 := \text{id}_{\boxtimes}$
- $\Theta := \text{id}_{k \otimes}$
- $\Theta_0 := \text{id}_k$.

Da unsere monoidale und komonoidale Struktur nicht strikt war, müssen die oben aufgeführten natürlichen Transformationen die monoidale beziehungsweise die komonoidale Struktur respektieren. Ist diese Verträglichkeit gegeben, so können wir folgende Aussage machen:

Satz 4.6.1. *Das Tupel $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, \nabla_R, \Lambda, \Upsilon, l, r, \lambda, \varrho, \Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0)$ ist eine 2-Bialgebra, auch bimonoideale Kategorie genannt.*

Beweis:

Für den Beweis liegt nun ein längeres Stück Arbeit vor uns. Wir müssen die Verträglichkeit von $\Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0$ mit den natürlichen Isomorphismen $(a, l, r, \alpha, \lambda, \varrho)$ beweisen.

Beginnen wir mit dem ersten Diagramm (2.72). Wir starten oben links und berechnen den “linken” Weg bis unten rechts:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{R}[\Phi_b] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_c]) \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) & (4.148) \\
\stackrel{\mathcal{R}^2 \equiv \mathcal{R}}{=} & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes (\mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \mathcal{R}[\Phi_c]) \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \\
\stackrel{\nabla_R(\Phi_a) \otimes_{\mathcal{R}} \Xi}{=} & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[(\mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \Phi_c)] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \\
\stackrel{\Xi}{\rightarrow} & \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes (\mathcal{R}[\Phi_b] \otimes \Phi_c)] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \\
\stackrel{\mathcal{R}^2 \equiv \mathcal{R}}{=} & \mathcal{R}[\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c)] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) \\
\stackrel{\nabla_R(a)}{\rightarrow} & \mathcal{R} \circ \mathcal{R}[(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \\
\stackrel{\mathcal{R}^2 \equiv \mathcal{R}}{=} & \mathcal{R}[(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c ,
\end{aligned}$$

wobei $\nabla_R(a) = \mathcal{R} \circ a \boxtimes a$ benutzt wurde.

Der andere Weg liefert:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{R}[\Phi_b] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_c]) \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c) & (4.149) \\
\stackrel{a \boxtimes a}{\rightarrow} & (\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_b]) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \\
\stackrel{\mathcal{R}^2 \equiv \mathcal{R}}{=} & (\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b]) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \\
\stackrel{\Xi \otimes_{\mathcal{R}} \nabla_R(\Phi_c)}{\rightarrow} & \mathcal{R}[(\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b)] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \\
\stackrel{\mathcal{R}^2 \equiv \mathcal{R}}{=} & \mathcal{R}[(\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b)] \otimes \mathcal{R}[\Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \\
\stackrel{\Xi}{\rightarrow} & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[(\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b)] \otimes \Phi_c \right] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c \\
= & \mathcal{R}[(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c] \boxtimes (\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c ,
\end{aligned}$$

wo wir die Schreibweise $\mathcal{R}[\mathcal{R}\mathcal{R}] = \mathcal{R}\mathcal{R}$ für $\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi]\mathcal{R}[\Phi]] = \mathcal{R}[\Phi]\mathcal{R}[\Phi]$ benutzt haben. Die Identität der beiden Wege beweist dieses Diagramm.

Der Beweis für das zweite Diagramm (2.73) ist etwas übersichtlicher.

Wir starten wieder von oben links und arbeiten uns auf dem “rechts” Weg nach unten vor.

$$\begin{aligned}
& I \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a & (4.150) \\
\stackrel{\Xi_0 \otimes_{\mathcal{R}} \nabla_R(\Phi_a)}{\rightarrow} & I \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \\
\stackrel{\Xi}{\rightarrow} & \mathcal{R}[I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a] \boxtimes I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \\
\stackrel{\nabla_R(l)}{\rightarrow} & \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a ,
\end{aligned}$$

Der kürzere “linke” Weg liefert:

$$\begin{aligned} I \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a & \quad (4.151) \\ \xrightarrow{l \boxtimes l} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a , & \end{aligned}$$

Womit wir das zweite Diagramm bewiesen hätten.

Den Beweis des dritten Diagramms (2.74) führen wir analog dem letzten Beweis: “rechter” Weg:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} I \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I & \quad (4.152) \\ \nabla_{\mathcal{R}}(\Phi_a) \otimes_{\mathcal{R}} \Xi_0 \xrightarrow{\quad} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} I \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I \\ \xrightarrow{\Xi} \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} I] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I \\ \nabla_{\mathcal{R}}(r) \xrightarrow{\quad} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a . \end{aligned}$$

Der linke weg führt zu demselben Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} I \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I & \quad (4.153) \\ \xrightarrow{r \boxtimes r} \mathcal{R}[\Phi_a] \boxtimes \Phi_a . \end{aligned}$$

Das vierte Diagramm (2.75) bezieht sich auf den Koeinsfunktor. Starten wir wieder oben links und gehen den “rechten Weg” nach unten rechts, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} (\Upsilon(\Phi_b) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_c)) & \quad (4.154) \\ \text{id} \otimes_{\text{vec}} \Theta \xrightarrow{\quad} \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\ \xrightarrow{\Theta} \Upsilon\left(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} (\Phi_b \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c)\right) \\ \xrightarrow{\Upsilon(a)} \Upsilon\left((\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c\right) , \end{aligned}$$

wobei der andere Weg dasselbe Resultat liefert:

$$\begin{aligned} \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} (\Upsilon(\Phi_b) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_c)) & \quad (4.155) \\ \xrightarrow{a_{\text{vec}}=\text{id}} (\Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_b)) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_c) \\ \Theta \otimes_{\text{vec}} \text{id} \xrightarrow{\quad} \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_c) \\ \xrightarrow{\Theta} \Upsilon\left((\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_c\right) . \end{aligned}$$

Das fünfte Diagramm (2.76) bezieht sich wiederum auf den Koeinsfunktor. Wieder gehen wir im ersten Schritt von oben links über den “rechten Weg” nach unten links:

$$\begin{aligned} k \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_a) & \quad (4.156) \\ \Theta_0 \otimes_{\text{vec}} \text{id} \xrightarrow{\quad} \Upsilon(I) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_a) \\ \xrightarrow{\Theta} \Upsilon(I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a) \\ \Upsilon(l)=\text{id} \xrightarrow{\quad} \Upsilon(\Phi_a) . \end{aligned}$$

“Linker Weg”:

$$\begin{aligned} k \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\Phi_a) & \quad (4.157) \\ \xrightarrow{l_{\text{vec}}} \Upsilon(\Phi_a) , \end{aligned}$$

wobei wiederum beide Wege übereinstimmen.

Zur Halbzeit beweisen wir das sechste Diagramm (2.77) äquivalent dem letzten Beweis:

$$\begin{array}{rcl}
& & \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} k & (4.158) \\
& \text{id} \xrightarrow{\otimes_{\text{vec}} \Theta_0} & \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(I) \\
& \xrightarrow{\Theta} & \Upsilon((\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I)) \\
& \xrightarrow{\Upsilon(r) = \text{id}} & \Upsilon(\Phi_a) .
\end{array}$$

Die andere Seite

$$\begin{array}{rcl}
& & \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\text{vec}} k & (4.159) \\
& \xrightarrow{r_{\text{vec}}} & \Upsilon(\Phi_a) .
\end{array}$$

An dieser Stelle wollen wir dem Leser noch einmal Mut zusprechen, durchzuhalten. Der Beweis des siebten Diagrammes (2.78) ist ein wenig komplexer als die letzten Beweise. Starten wir mit dem “linken Weg”:

$$\begin{array}{rcl}
& & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes (\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) & (4.160) \\
& \stackrel{\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}}{=} & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes (\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& \xrightarrow{\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Xi} & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes (\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& \xrightarrow{(\text{id} \boxtimes \nabla_{\mathcal{R}}) \circ \Xi} & \mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes (\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b \right] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \\
& = & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \right] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b .
\end{array}$$

Der andere Weg liefert:

$$\begin{array}{rcl}
& & \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes (\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) & (4.161) \\
& \xrightarrow{\alpha \otimes_{\Phi \boxtimes \Phi} \Phi \boxtimes \alpha} & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \right] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \\
& \xrightarrow{\Xi \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b} & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}[\Phi_b] \right] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \\
& \xrightarrow{(\nabla_{\mathcal{R}} \boxtimes \text{id}) \circ \Xi} & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b] \boxtimes \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \Phi_b \right] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \\
& = & \mathcal{R} \left[\mathcal{R}[\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \right] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b ,
\end{array}$$

womit wir das unübersichtlichste Diagramm bewiesen hätten.

Diagramm acht (2.79) bereitet uns da nicht so viel Kopfzerbrechen:

$$\begin{array}{rcl}
& & \Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a]) \otimes_{\text{vec}} \Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) & (4.162) \\
& \xrightarrow{\Theta \boxtimes \text{id}} & \Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& = & \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& \xrightarrow{(\Upsilon \boxtimes \text{id}) \circ \Xi} & \Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b] \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\
& = & \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \\
& \xrightarrow{l} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b .
\end{array}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned} & \Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_a]) \otimes_{\mathbf{vec}} \Upsilon(\mathcal{R}[\Phi_b]) \boxtimes \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \\ \xrightarrow{\lambda \otimes \lambda} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b . \end{aligned} \quad (4.163)$$

Auch Diagramm neun (2.80) läßt sich relativ schnell beweisen, da der Beweis wiederum analog zu dem des letzten Diagrammes ist:

$$\begin{aligned} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \boxtimes \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\mathbf{vec}} \Upsilon(\Phi_b) \\ \xrightarrow{\text{id} \boxtimes \Theta} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \boxtimes \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\ \xrightarrow{\text{id} \boxtimes \Upsilon} & R[\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b] \boxtimes \Upsilon(\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b) \\ \xrightarrow{\varrho} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b . \end{aligned} \quad (4.164)$$

Linke Seite

$$\begin{aligned} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b \boxtimes \Upsilon(\Phi_a) \otimes_{\mathbf{vec}} \Upsilon(\Phi_b) \\ \xrightarrow{\varrho \otimes \varrho} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_b . \end{aligned} \quad (4.165)$$

Der Beweis des zehnten Diagramms (2.81) ist trivial, bedenkt man, daß \mathcal{R} nicht auf I wirkt, also quasi $\mathcal{R}(I) = I$. Ferner ist Ξ_0 trivial.

$$\begin{aligned} & I \boxtimes (I \boxtimes I) \\ \xrightarrow{\text{id} \boxtimes \Xi_0} & I \boxtimes (I \boxtimes I) \\ \xrightarrow{(\text{id} \boxtimes \nabla_R) \circ \Xi_0} & I \boxtimes (I \boxtimes I) \\ \xrightarrow{\alpha} & (I \boxtimes I) \boxtimes I . \end{aligned} \quad (4.166)$$

Linker Weg:

$$\begin{aligned} & I \boxtimes (I \boxtimes I) \\ \xrightarrow{\Lambda \boxtimes \Lambda \boxtimes \Lambda \circ a_{\mathbf{vec}}} & (I \boxtimes I) \boxtimes I \\ \xrightarrow{\Xi_0 \boxtimes \text{id}} & (I \boxtimes I) \boxtimes I \\ \xrightarrow{(\nabla_R \boxtimes \text{id}) \circ \Xi_0} & (I \boxtimes I) \boxtimes I . \end{aligned} \quad (4.167)$$

Der beweis des vorletzten Diagramms (2.82) setzt auch keine besonderen Rätsel auf. Wir beweisen *straight forward*

$$\begin{aligned} & k \boxtimes I \\ \xrightarrow{\Theta_0 \boxtimes \text{id}} & \Upsilon(I) \boxtimes I \\ \xrightarrow{(\Upsilon \boxtimes \text{id}) \circ \Xi_0} & R[\Upsilon(I)] \boxtimes I \\ = & \Upsilon(I) \boxtimes I \\ \xrightarrow{\lambda} & I , \end{aligned} \quad (4.168)$$

während auf der anderen Seite

$$k \boxtimes \phi_\varepsilon \cong I .$$

Nun kommen wir endlich zu dem letzten Diagramm (2.83). Der Beweis läuft analog zum Beweis des letzten Diagrammes

$$\begin{aligned}
& I \boxtimes k && (4.169) \\
\text{id} \boxtimes \Theta_0 & \xrightarrow{\quad} & I \boxtimes \Upsilon(I) \\
(\text{id} \boxtimes \Upsilon) \circ \Xi_0 & \xrightarrow{\quad} & R[I] \boxtimes \Upsilon(I) \\
& = & I \boxtimes \Upsilon(I) \\
& \xrightarrow{\quad e} & I \quad ,
\end{aligned}$$

wobei wiederum die andere Seite

$$I \boxtimes k \cong I$$

dasselbe Ergebnis liefert. Somit ist $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, \nabla_R, \Lambda, \Upsilon, l, r, \lambda, \varrho, \Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0)$ eine 2-Bialgebra!

Nach dieser, zugegeben, etwas ermüdenden Beweis-Schlacht haben wir es letztendlich geschafft, eine bimonoidale Struktur auf der Kategorie Φ zu definieren. Die bimonoidale Struktur von Φ erlaubt es uns nun, gleichzeitig sowohl die monoidale als auch die komonoidale Struktur zu benutzen. Wir brauchen dabei beide Strukturen, um ein kategorientheoretisches Äquivalent zu der Abbildung Γ , die auf der Gruppe G_R definiert war, einzuführen.

Im nächsten Schritt müssen wir einen Funktor einführen, der seinem Wesen nach der Inversion einer Gruppe entspricht. Im Bereich der Bialgebren führt die Einführung einer inversionsähnlichen Abbildung zur Definition einer Antipode. Im Fall bimonoidaler Kategorien führt dies zu einem Funktor zusammen mit zwei natürlichen Transformationen, die wir ebenfalls als *Antipode* bezeichnen. Die Einführung einer *Antipode* auf einer bimonoidalen Struktur haben wir bereits in Kapitel 2.6 diskutiert. Die Bedeutung des Wortes *Antipode* im Zusammenhang mit bimonoidalen Kategorien bezieht sich dabei auf die Kategorifizierung der Antipode einer Hopfalgebra. Wir werden diese beiden Begriffe gleichwertig benutzen, wobei aus dem Kontext klar wird, ob es sich bei der Antipode um einen Endofunktor einer Hopfkategorie oder einem Endomorphismus einer Hopfalgebra handelt. Wir werden im folgenden Kapitel die bimonoidale Kategorie Φ um die Struktur einer Antipode erweitern und die Bedeutung für Renormierung diskutieren.

4.7 Die Hopfkategorie Φ

Um die bimonoidale Kategorie Φ auf eine Hopfkategorie Φ zu erweitern, müssen wir, wie in Kapitel 2.6 beschrieben, noch eine *Antipode* $(\mathcal{S}, \sigma_1, \sigma_2)$ definieren.

Die Definition einer *Antipode* auf der bimonoidalen Kategorie Φ überrascht nicht, sind die Objekte der Kategorie doch Mengen von Darstellungen der Hopfalgebra \mathcal{H}_R , die ihrerseits eine Antipode S besitzt. Wir wollen nun überprüfen, ob die Hopfalgebra \mathcal{H}_R ihre Hopfstruktur auf die bimonoidale Kategorie Φ vererbt.

Die Vererbung der Hopfstruktur würde die bimonoidale Kategorie Φ mit der für Renormierung notwendigen Information der Kombinatorik der Zimmermannschen *Forest Formula* versorgen.

Zur Definition einer *Antipode* auf der bimonoidalen Kategorie Φ benötigen wir einen Funktor

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} : \Phi & \longrightarrow \Phi && (4.170) \\
\Phi_a & \longmapsto \mathcal{S}[\Phi_a] \quad ,
\end{aligned}$$

zusammen mit zwei natürlichen Isomorphismen

$$\sigma_1 : \otimes_{\mathcal{R}} \circ (\mathcal{S} \boxtimes \text{id}) \circ \nabla_R \longrightarrow \Lambda \circ \Upsilon \quad (4.171)$$

$$\sigma_2 : \Lambda \circ \Upsilon \longrightarrow \otimes_{\mathcal{R}} \circ (\text{id} \boxtimes \mathcal{S}) \circ \nabla_R \quad . \quad (4.172)$$

Wir definieren den Funktor zuerst einmal auf der Stufe der Elemente, o.B.d.A des Objektes Φ_a :

$$\mathcal{S} : \phi_a \longmapsto \phi_a \circ S \quad \forall \phi_a \in \Phi_a \quad , \quad (4.173)$$

wobei S die Antipode der Hopfalgebra \mathcal{H}_R ist.

Mit dieser *Antipode* für unsere bimonoidale Kategorie Φ haben wir die iterative Struktur von Renormierung in die bimonoidale Struktur der Kategorie Φ implementiert.

Die Einführung der iterativen Struktur als Pullback der Antipode der Hopfalgebra \mathcal{H}_R ist klar: die Kombinatorik der *Forest Formula* macht nur Sinn, wenn sie direkt auf einen Wurzelbaum der Hopfalgebra \mathcal{H}_R wirkt. Die Aufgabe der Charaktere von \mathcal{H}_R und damit der Objekte der bimonoidalen Kategorie Φ ist es, zusammen mit dem monoidalen und komonoidalen Produkt die Wirkung einer Renormierungsabbildung einzuführen.

Aus der Definition der *Antipode* (4.173) folgt

$$\mathcal{S}[\Phi_a] := \{ \phi_a \circ \mathcal{S} | \phi_a \in \Phi_a \} . \quad (4.174)$$

Führen wir uns noch einmal die Definition der *Antipode* einer Hopfkategorie in Kapitel 2.6 vor Augen so sehen wir, daß sich der Begriff der *Antipode* einer Hopfkategorie nicht nur auf den Endofunktor \mathcal{S} beschränkt, sondern auf ein Tripel $(\mathcal{S}, \sigma_1, \sigma_2)$. Dieses Tripel benötigen wir, da \mathcal{S} aufgrund der fehlenden Assoziativität beziehungsweise Koassoziativität nicht die Kategorifizierung der Antipodenbedingung⁸, $\mathcal{S} * \text{id} = \eta \circ \varepsilon = \text{id} * \mathcal{S}$, einer Hopfalgebra erfüllt. Erst zusammen mit den natürlichen Transformationen σ_1, σ_2 erreichen wir eine Kategorifizierung der Antipodenbedingung. Definieren wir eine natürliche Transformation σ_1 gemäß (2.84)

$$\begin{aligned} & (\otimes_{\mathcal{R}} \circ (\mathcal{S} \boxtimes \text{id}) \circ \nabla_R)(\Phi_a) \\ &= \mathcal{R}[\mathcal{S}(\Phi_a)] \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \\ &= \mathcal{R}[\mathcal{S}(\Phi_a)] \otimes \Phi_a . \end{aligned} \quad (4.175)$$

Es gilt aber

$$\mathcal{S}(\Phi_a) \otimes \Phi_a \cong \Lambda \circ \Upsilon , \quad (4.176)$$

was klar wird, wenn man sich die Wirkung von \mathcal{S} auf die Elemente der Objekte von Φ ansieht:

$$\begin{aligned} \phi_a(\mathcal{S}(t'))\phi_a(t'') &= \phi_a(\mathcal{S}(t')t'') \\ &= \varepsilon(t)1 \\ &\Rightarrow \phi_a(\mathcal{S}(t'))\phi_a(t'') \in \Lambda \circ \Upsilon(\Phi_a) , \end{aligned} \quad (4.177)$$

woraus folgt

$$\sigma_1 := \mathcal{R}^{-1} \otimes \text{id} . \quad (4.178)$$

Somit haben wir den ersten der beiden benötigten natürlichen Transformationen definiert.

Betrachten wir uns nun die Bedingungen für σ_2 . Die rechte Seite liefert:

$$\begin{aligned} & (\otimes_{\mathcal{R}} \circ (\text{id} \boxtimes \mathcal{S}) \circ \nabla_R)(\Phi_a) = \mathcal{R}[\Phi_a] \otimes \mathcal{S}(\Phi_a) \\ &= \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a . \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned} (\Lambda \circ \Upsilon)(\Phi_a) &= I \\ &= \Phi_a \otimes \mathcal{S}(\Phi_a) \end{aligned} \quad (4.179)$$

gilt

$$\sigma_2 := R \otimes \text{id} . \quad (4.180)$$

Mit den beiden natürlichen Transformationen σ_1, σ_2 haben wir alle Abbildungen definiert, die zur Definition einer *Antipode*, $(\mathcal{S}, \sigma_1, \sigma_2)$, für die bimonoidale Kategorie Φ notwendig sind.

Wir können deshalb sagen

⁸Siehe Anhang

Satz 4.7.1. *Das Tupel $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, \nabla_R, \Lambda, \Upsilon, \mathcal{S}, l, r, \lambda, \varrho, \Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0, \sigma_1, \sigma_2)$ ist eine Hopfkategorie.*

Beweis:

Beweisen wir die erste Relation von (2.86), die die beiden natürlichen Transformationen σ_1, σ_2 erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} & \Phi_a & (4.181) \\ \xrightarrow{\sigma_2 \otimes_{\mathcal{R}} \text{id}} & R[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{S}(\Phi_a) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \\ = & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{S}(\Phi_a) \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes_{\mathcal{R}} \sigma_1} & \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} I \\ \xrightarrow{r} & \Phi_a . & (4.182) \end{aligned}$$

Die zweite Relation (2.86) für σ_1, σ_2 beweist sich wie folgt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}[\Phi_a] & (4.183) \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes_{\mathcal{R}} \sigma_2} & \mathcal{S}[\Phi_a] \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{S}[\Phi_a] \\ \xrightarrow{\sigma_1 \otimes_{\mathcal{R}} \text{id}} & I \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \\ \xrightarrow{l} & \mathcal{S}[\Phi_a] . & (4.184) \end{aligned}$$

Somit ist $(\mathcal{S}, \sigma_1, \sigma_2)$ eine *Antipode* für die 2-Bialgebra Φ .

Mithin ist $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, \nabla_R, \Lambda, \Upsilon, \mathcal{S}, l, r, \lambda, \varrho, \Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0, \sigma_1, \sigma_2)$ eine Hopfkategorie. \square

Die modifizierte Kategorifizierung der Gruppe G_R hat also zu der Definition einer Hopfkategorie geführt.

Was haben wir durch die Kategorifizierung erreicht?

Die Kategorie Φ stellt eine Klassifikation der Charaktere der Hopfalgebra \mathcal{H}_R auf den Polynomring V aus Sicht von Renormierung dar.

Die Objekte klassifizieren die Charaktere bezüglich der auftretenden Skalen, was sinnvoll aus Sicht der Renormierung ist, da der Renormierungsprozeß im *On-Shell*-Schema mit Hilfe von Skalenwechseln der dargestellten Polynome die Counterterme bestimmt. Die Skalenwechsel sind wiederum per Pullback mit den Morphismen der Kategorie Φ verknüpft.

Die monoidale und bimonoidale Struktur vereint zwei weitere aus Sicht von Renormierung wichtige Punkte. Einerseits implementiert das monoidale Produkt die Hopfalgebrenstruktur von \mathcal{H}_R , die eine Beschreibung der für die Berechnung von Countertermen wichtigen Kombinatorik der *Forst-Formula* liefert, andererseits berücksichtigt $\otimes_{\mathcal{R}}$ automatisch die Wirkung der Skalenwechsel, die im *On-Shell*-Schema zur Berechnung der Counterterme aus der *Forest Formula* benötigt werden.

Allgemeine Renormierungsschemata haben wir somit ebenfalls berücksichtigt, da wir bei der Konstruktion der Kategorie Φ auch baumabhängige Skalen zugelassen haben.

Die *Antipode* $(\mathcal{S}, \sigma_1, \sigma_2)$ ermöglicht nun eine Implementierung von Countertermen in Form eines Funktors der Hopfkategorie Φ .

Wie man den Funktor \mathcal{S} einsetzt, um Renormierung mit Hilfe der Hopfkategorie Φ zu formulieren, wollen wir nun im nächsten Kapitel diskutieren.

4.8 Hopfkategorie und Renormierung

In dem letzten Kapitel haben wir die Kategorie Φ mit einer 2-Hopfalgebrenstruktur versehen, die wir, ausgehend von der modifizierten Kategorisierung von G_R , mit allen Informationen bezüglich Renormierung versehen haben. Der Funktor \mathcal{S} versorgte Φ mit der Kombinatorik der *Forest-Formula*, das komonoidale und das monoidale Produkt versorgen uns mit Renormierungsabbildungen.

Wir hatten jedoch bei der Definition des monoidalen Produktes $\otimes_{\mathcal{R}}$ erwähnt, daß die Wirkung von $\otimes_{\mathcal{R}}$ auch trivial sein kann. Betrachten wir ein Beispiel:

$$\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \quad (4.185)$$

und

$$\text{dom}(\mathcal{R}) \neq \Phi_a . \quad (4.186)$$

In diesem Falle wirkt $\otimes_{\mathcal{R}}$ trivial

$$\Phi_a \otimes_{\mathcal{R}} \Phi_a \equiv \Phi_a \otimes \Phi_a . \quad (4.187)$$

Eine triviale Wirkung von $\otimes_{\mathcal{R}}$ ist natürlich keine Voraussetzung für eine physikalisch sinnvolle Renormierung.

Aus diesem Grunde führen wir sogenannte *Renormierungspaare* (Φ_a, \mathcal{R}) ein.

Die *Renormierungspaare* sind so gewählt, daß

$$\text{dom}(\mathcal{R}) = \Phi_a . \quad (4.188)$$

Dabei haben wir aber die freie Wahl des Skalenwechsels \mathcal{R} . Er kann entweder baumunabhängig oder baumabhängig als “übersetzte” *MS*-Renormierungsabbildung sein.

Durch Bildung solcher *Renormierungspaare* haben wir sichergestellt, daß \mathcal{R} auf Φ_a wirkt und wir somit nichttriviale Renormierung beschreiben.

Die Renormierungspaare alleine liefern uns noch keine endlichen Ergebnisse. Wir benötigen noch einen Endofunktor $\Gamma : \Phi \longrightarrow \Phi$, der jedem Objekt ein anderes Objekt zuordnet, dessen Elemente gerade Charakteren entsprechen, die für alle Wurzelbäume t endliche Ergebnisse liefern.

Wir erwarten, daß dieser Funktor einer Kategorifizierung des Endomorphismus Γ ist, der auf der Gruppe G_r wirkt.

Wir definieren deshalb einen Endofunktor

$$\begin{aligned} \Gamma : \Phi &\longrightarrow \Phi & (4.189) \\ \Gamma &:= \otimes_{\mathcal{R}} \circ (\mathcal{S} \otimes \text{id}) \circ \nabla_R , \end{aligned}$$

so enthält $\Gamma(\Phi_a)$ nur Darstellungen, die keine Polterme in dem Laurentparameter ε besitzen. Wir nennen Γ das *Renormierungsverhältnis* [3].

Wollen wir also nichttriviale Renormierung kategorientheoretisch beschreiben, benötigen wir ein Tripel $(\Phi_a, \mathcal{R}, \Gamma)$. Diese Angaben reichen aus, um mit Hilfe der Hopfkategorie Φ eine kategorientheoretische Interpretation von Renormierung zu geben.

An diesem Punkt wollen wir noch ein Wort über die nichttrivialen Strukturen der Hopfkategorie Φ verlieren.

Die Wahl eines Renormierungstripels $(\Phi_a, \mathcal{R}, \Gamma)$ legt somit ein monodiales und komonoidales Produkt $\otimes_{\mathcal{R}}$ beziehungsweise ∇_R für Φ fest. Je nach Wahl des Morphismus \mathcal{R} erhalten wir für die Hopfkategorie Φ eine strikte oder nichttriviale Struktur.

Ist $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{a,b}$ ein Pullback eines baumunabhängigen Skalenwechsels $R_{a,b}$, so gilt

$$\mathcal{R}_{a,b}[\mathcal{R}_{a,b}[\Phi_a] \otimes \Phi_a] = \mathcal{R}_{a,b}[\Phi_a] \otimes \mathcal{R}_{a,b}[\Phi_a] , \quad (4.190)$$

womit wir eine strikte Struktur für die Hopfkategorie Φ erhalten.

Eine strikte Struktur besitzt per Definitionem triviale natürliche Transformationen

$$l = r = \lambda = \varrho = \Xi = \Xi_0 = \Theta = \Theta_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \text{id} . \quad (4.191)$$

Aus Sicht von Renormierung ist es gleichgültig, ob Φ eine strikte oder nichttriviale Struktur besitzt. Eine genauere Untersuchung der natürlichen Transformationen $(l, r, \lambda, \varrho, \Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0, \sigma_1, \sigma_2)$ aus physikalischer Sicht kann über die Auswirkungen nichttrivialer Strukturen für die Renormierung Auskunft geben. Eine tiefere Untersuchung von $(l, r, \lambda, \varrho, \Xi, \Xi_0, \Theta, \Theta_0, \sigma_1, \sigma_2)$ wird allerdings in der vorliegenden Arbeit nicht gegeben werden, sondern ist Aufgabe zukünftiger Arbeiten. Die algebraischen Grundlagen dazu wurden in dieser Arbeit gegeben.

4.9 Zusammenfassung des Kapitels

Was haben wir nun in diesem Kapitel studiert?

Ziel war eine kategorientheoretische Untersuchung von Renormierung. Als Grundlage diente das Zusammenspiel zwischen Skalenwechsel und Darstellungen der Hopfalgebra, also die Wirkung der Skalenwechsel beziehungsweise, allgemeiner gesehen, die Wirkung von Renormierungsabbildungen auf *divergente* Polynome. Wesentlich für die Renormierung waren dabei Verhältnisse von Darstellungen zweier verschiedener Sätze von Skalen. Diese Verhältnisse erlauben es, endliche Darstellungen der Hopfalgebra \mathcal{H}_R zu bekommen, wobei endlich bedeutet, daß der Limes des Laurentparameters $\varepsilon \rightarrow 0$ der dargestellten Laurentreihe definiert ist. Also tragen die Skalen, die die Darstellungen der Hopfalgebra klassifizieren, einen zentralen Beitrag zum Renormierungsvorgang bei⁹. Fassen wir alle divergenten Darstellungen der Hopfalgebra, die durch einen bestimmten Satz von Skalen definiert ist, in einer Menge zusammen, so erhalten wir eine sinnvolle Klassifikation der Darstellungen von \mathcal{H}_R im Sinne der Renormierungstheorie. Wenn wir solche Mengen definieren, ist ein Skalenwechsel gerade eine Abbildung zwischen zwei solcher Mengen. Berücksichtigt man Domäne und Kodomäne dieser Abbildung und betrachtet die Identitätsabbildung einer jeden solchen Menge, so haben wir die Struktur einer Kategorie definiert.

Das bedeutet, daß eine Klassifikation der Darstellungen auf \mathcal{H}_R auf natürlichem Wege zu der Definition einer Kategorie führt. Vergleichbar der Rolle der Morphismen der Kategorie \mathbf{vec} von Vektorräumen, stellen die Morphismen von Φ , also die Skalenwechsel, Möglichkeiten zum Vergleich der Objekte von Φ her. Solche Vergleiche in Form von Verhältnissen sind ebenfalls Grundlage für die Renormierung. Man kann die Kategorie Φ so interpretieren, daß jedes Objekt dieser Kategorie verschiedene Theorien zusammenfasst und mit derselben Skala auswertet, wobei die Morphismen die Theorien verschiedener Skalen miteinander vergleichen. Da die Skalenwechsel, also die Morphismen, invertierbar sind, ist Φ zusätzlich noch ein *Groupoid*.

Weiterhin hatten wir gesehen, daß der Umgang mit baumabhängigen Skalenwechseln die Einführung einer additiven Struktur verlangt. Die Bilder solcher baumabhängiger Morphismen waren gerade Teilmengen einer direkten Summen von Objekten klassifiziert durch einen Satz baumabhängiger Skalen. Somit ist eine additive Kategorie die natürliche Struktur, um Charaktere von \mathcal{H}_R und deren Renormierungsabbildungen zu klassifizieren.

Um eine Verhältnisbildung zweier solcher Mengen zu ermöglichen, muß ein Produkt und ein Koproduct eingeführt werden. Dabei wurde der Tatsache Rechnung getragen, daß das Verhältnis zweier Charaktere unterschiedlicher Skalen im Sinne von Renormierung nur dann Sinn macht, wenn die eine Skala durch eine Renormierungsabbildung (respektive Skalenwechsel) aus der anderen übergeht. Aus diesem Grund wurde das "Produkt" auf einer Seite um die Wirkung eines Skalenwechsels erweitert, was im allgemeinen jedoch zu einer Verletzung der Assoziativität (Koassoziativität) der monoidalen (komonoidalen) Struktur führt. Diese Verletzungen sind jedoch einerseits durch Assoziator und Koassoziator *kontrollierbar*, andererseits sind die monoidale und komonoidale Struktur verträglich, was zu einer bimonoidalen Struktur führt. Vergleicht man die monoidale Kategorie Φ mit der Eigenschaft der Gruppe G_R so sieht man, daß $(\Phi, \otimes_{\mathcal{R}}, I, a, l, r)$ als "modifizierte Kategorifizierung" von G_R angesehen werden kann. Dabei enthält die kategorisierte Version zusätzlich noch Informationen über die Klassifikation der Charaktere und Renormierungsabbildungen. Um Renormierung kategorientheoretisch beschreiben zu können, muß zusätzlich noch die iterative Struktur zur Berechnung der *Forest Formula* eingeführt werden. Dies erreichen wir durch Einführung des Endofunktors \mathcal{S} , der als Pullback der Wirkung der Antipode S von \mathcal{H}_R definiert ist. Mithin haben wir somit die Kombinatorik für die Z -Faktoren in die Kategorie Φ eingeführt. Zu bemerken ist, daß im Fall der Hopfalgebra \mathcal{H}_R die Antipode S in Ihrer Wirkung *exakt* der Inversen der Identität gegenüber dem Faltungsprodukt entsprach. Im kategorisierten Fall ist das nicht so. Hier entspricht die Faltung der *Antipode* mit der Identität gerade den Bedingungen, die wir für die Renormierung benötigen. Wir müssen im Gegenteil noch eine natürliche Transformation σ_1 anwenden, um zu trivialen Ergebnissen zu kommen.

Allerdings haben wir diese Eigenschaft der Antipode aufgrund der Assoziativität erkaufte. Dies ist jedoch keine Einschränkung, da wir uns in der Sprache der Kategorien bewegen und solche Verlet-

⁹Immer im Hintergedanken, daß wir beliebige Renormierungsschemata durch baumabhängige Skalenwechsel ausdrücken können.

zungen gerade der Grund für eine kategorientheoretische Betrachtung darstellen. Außerdem bietet die zusätzliche Struktur noch weitere Ansatzpunkte zur Untersuchung der Struktur von Renormierung. Zum Beispiel wird auf Hopfalgebreniveau eine Verletzung der Koassoziativität durch einen sogenannten *Drinfeldassoziator* beschrieben, den man durch Pullback des Assoziators einer mit der Hopfalgebra verknüpften monoidalen Kategorie erhält [24]. Ein solcher Drinfeldassoziator läßt sich mit Hilfe der *Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung* bestimmen. Dieser Drinfeldassoziator ist dabei eine Reihe, bei der als Koeffizienten unter anderem verschiedene Polylogarithmen auftreten [24], wobei Polylogarithmen als nichtrationale Faktoren bei den Berechnungen von Feynmangraphen vorkommen.

Was hat uns diese Untersuchung nun letztendlich gebracht?

Auf den ersten Blick haben wir keine Erleichterungen bezüglich Rechnungen und Kombinatorik erhalten. Was wir aber durch diese Untersuchung bekommen haben, ist ein tieferes Verständnis für die Klassifikation der Charaktere von \mathcal{H}_R und der damit verbundenen Skalenwechsel. Es konnte die Wirkungsweise baumabhängiger Skalenwechsel, die ihrem Wesen nach beliebigen Renormierungsschemata entsprachen, sichtbar gemacht werden. Es konnte eine Struktur definiert werden, in der die Wirkung der Antipode alleine für die Beschreibung des Renormierungsprozesses ausreichte. Alles in allem ist die 2-Hopfalgebra Φ eine vollständige Betrachtung der Klassifikation der an der Renormierung beteiligten Parameter.

Teil II

Baumoperaden

Kapitel 5

Operaden

In Kapitel 3.2 haben wir mit den Wurzelbäumen geeignete Objekte gefunden, um die verschachtelte Struktur der Subdivergenzen von Feynmangraphen als Basismenge einer Hopfalgebra darzustellen. In diesem Teil der Arbeit wollen wir eine Möglichkeit vorstellen, diese verschachtelte Struktur von Feynmangraphen rein algebraisch, das heißt ohne einen zusätzlichen “graphentheoretischen” Input, zu beschreiben. Dabei werden wir als Basismenge einer zu \mathcal{H}_R isomorphen Hopfalgebra sogenannte *Baumoperaden* einführen. Baumoperaden sind eine spezielle Form von Operaden, deren graphentheoretische Darstellung äquivalent den Wurzelbäumen ist. Motiviert durch die Äquivalenz der graphischen Interpretation der Baumoperaden werden wir eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen Baumoperaden und Wurzelbäumen angeben.

In diesem Kapitel wollen wir zuerst einmal eine Definition einer Operade geben, bevor wir den Begriff der Baumoperade einführen werden. Danach werden wir die zu \mathcal{H}_R isomorphe Hopfalgebrenstruktur auf der freien unitalen Algebra über der Menge der Baumoperaden definieren. Die Isomorphie dieser beiden Hopfalgebren wird für den Fall undekorierter Wurzelbäume gezeigt. Zum Schluß dieses Kapitels werden wir dann noch den Fall dekorierte Wurzelbäume diskutieren.

5.1 Operaden

Will man eine Operade definieren, so gibt es mehrere Ansätze für (selbstverständlich äquivalente) Definitionen, die von verschiedenen Interessen der Verwendung von Operaden geprägt sind. Zum Beispiel existiert ein kategorientheoretischer Zugang [16] oder auch ein “klassischer” Zugang, wie er unter anderem in [32] beschrieben wird. Selbstverständlich sind damit die Möglichkeiten der Definitionen noch nicht erschöpft, jedoch sind diese beiden Zugänge der richtige Ansatzpunkt für unser Ziel, der Definition von Baumoperaden. Obwohl der “klassische” Zugang in [32] nicht der mathematisch eleganteste Weg ist, Operaden zu definieren (wie es jedenfalls Kritz in [32] kommentiert), so bietet dieser Weg jedoch eine anschauliche Beweisgrundlage für den Vergleich von Operaden mit Wurzelbäumen. Der Zugang, wie in [16] beschrieben, liefert uns eine graphische Interpretation der Operaden, anhand derer wir einen Vergleich mit Wurzelbäumen führen können. Wir werden einen Mittelweg zwischen diesen beiden Arten der Definitionen wählen, indem wir die Definition aus [32] als Vorlage nehmen und eine graphische Interpretation wie in [16] geben. In [32] liegt der Definition einer Operade die Struktur von \mathbf{Z} -graduierten differentiellen κ -Moduln zugrunde. Da wir diese Struktur nicht benötigen werden, definieren wir Operaden über “herkömmlichen” graduierten κ -Moduln.

Operaden beschreiben Operationen auf speziellen Räumen. Zum Beispiel kann eine Operade eine Beschreibung für Verknüpfungen multilinearer Abbildungen sein. Dabei können multilineare Abbildungen, die auf eine verschiedene Anzahl von Kopien des zugrundeliegenden Raumes wirken, miteinander verknüpft und mehrere Abbildungen “hintereinandergeschaltet” werden. Wir werden solche Operaden als Beispiel diskutieren. Dieses Beispiel wird uns einen Prototyp für die Interpretation von Operaden liefern.

Beginnen wir mit der Definition einer Operade. Wie am Anfang dieses Kapitels erwähnt, werden

wir zunächst eine nicht so elegante aber für unsere Belange sinnvolle Definition einer Operade geben [32] und dann graphisch interpretieren [16].

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(n)$ einen κ -Modul vom Grad n .

Def 5.1.1. Eine Operade \mathcal{O} besteht aus κ -Moduln $\mathcal{O}(j)$, $j \geq 0$, auf denen eine Einsabbildung

$$\eta : \kappa \longrightarrow \mathcal{O}(1) \quad (5.1)$$

und eine Rechtswirkung der Symmetrischen Gruppe S_j auf jedem Modul $\mathcal{O}(j)$ definiert ist. Weiterhin existieren Abbildungen

$$B : (\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_k)) \longrightarrow \mathcal{O}(j) , \quad (5.2)$$

wo $k \geq 1$, $j_s \geq 1$ und $\sum_s j_s = j$, die in folgendem Sinne assoziativ, unital und äquivariant ist:

(a): Assoziativität

Seien $\sum j_s = j$ und $\sum i_t = i$. Wir definieren

$$\begin{aligned} g_s &= j_1 + \dots + j_s \\ h_s &= i_{g_{s-1}+1} + \dots + i_{g_s} \quad 1 \leq s \leq k , \end{aligned} \quad (5.3)$$

so daß

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \mathcal{O}(j_s) \right) \otimes \left(\bigotimes_{r=1}^i \mathcal{O}(i_r) \right) & \xrightarrow{B \otimes id} & \mathcal{O}(j) \otimes \left(\bigotimes_{r=1}^j \mathcal{O}(i_r) \right) \\ \downarrow \text{shufffle} & & \downarrow B \\ \mathcal{O}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \left(\mathcal{O}(j_s) \otimes \left(\bigotimes_{q=1}^{j_s} \mathcal{O}(i_{g_{s-1}+q}) \right) \right) \right) & \xrightarrow{id \otimes (\otimes_s B)} & \mathcal{O}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \mathcal{O}(h_s) \right) \\ & & \uparrow B \\ & & \mathcal{O}(i) \end{array} \quad (5.4)$$

kommutiert.

(b) Einsdiagramme:

Die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(k) \otimes (\kappa)^k & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}(k) \\ \downarrow id \otimes \eta^k & \nearrow B & \\ \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(1)^k & & \end{array} \quad (5.5)$$

und

$$\begin{array}{ccc} \kappa \otimes \mathcal{O}(j) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}(j) \\ \downarrow \eta \otimes id & \nearrow B & \\ \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(j) & & \end{array} \quad (5.6)$$

(c) Die Äquivalanzen:

Wir definieren folgende Permutationen: $\sigma \in S_k$ und $\tau_s \in S_{j_s}$. Dabei permutiert $\sigma(j_1, \dots, j_k) \in S_j$ genau k Blöcke von Buchstaben wenn σ gerade k Buchstaben permutiert¹, und $\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k \in S_j$ ist die Blocksumme.

Dann kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_k) & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_{\sigma(1)}) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_{\sigma(k)}) \quad (5.7) \\
 \downarrow B & & \downarrow B \\
 \mathcal{O}(j) & \xrightarrow{\sigma(j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(k)})} & \mathcal{O}(j)
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_k) & \xrightarrow{id \otimes \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_k} & \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_k) \quad (5.8) \\
 \downarrow B & & \downarrow B \\
 \mathcal{O}(j) & \xrightarrow{\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k} & \mathcal{O}(j)
 \end{array}$$

Diese abstrakte Definition wollen wir nun anhand eines Beispiels verdeutlichen. Sei V ein Vektorraum. Wir definieren

$$\mathcal{O}(n) := \text{Hom}(V^{\otimes n}, V) \quad (5.9)$$

Die Abbildung B wirkt auf die Abbildungen $\mathcal{O}(n)$ wie folgt ($\sum j_k = j$):

$$\begin{aligned}
 & B(\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_k)) [v_1 \otimes \dots \otimes v_j] \\
 = & \mathcal{O}(k) [\mathcal{O}(j_1) [v_1 \otimes \dots \otimes v_{j_1}] \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(j_k) [v_{j-j_k+1} \otimes \dots \otimes v_j]]
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dieses Beispiel zeigt anschaulich die Bedeutung von Operaden. Operaden bestehen ganz allgemein aus einer Familie von Mengen $\mathcal{O}(n)$ und einer Verknüpfung B von ihnen. Operaden beschreiben somit Operationen (zum Beispiel multilineare Abbildungen) auf diesen Mengen. Der Fall der multilinearen Abbildungen gibt uns ein einfaches und nachvollziehbares Beispiel für die Wirkungsweise von Operaden. Diese Art von Operationen, mit denen sich die Operaden beschäftigen, können wir graphisch darstellen. Wir motivieren diese graphische Darstellung anhand des Beispiels multilinearer Abbildungen.

Wir werden nun eine graphische Interpretation für die Abbildungen $\mathcal{O}(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$ wie

¹Wir werden diesen Schritt noch einmal graphisch darstellen.

folgt einführen:

$$\mathcal{O}(1) =: \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ | \end{array} \quad (5.11)$$

$$\mathcal{O}(2) =: \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ | \end{array}$$

$$\mathcal{O}(3) =: \begin{array}{c} \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \\ | \end{array}$$

Wir interpretieren also eine Menge von Abbildungen

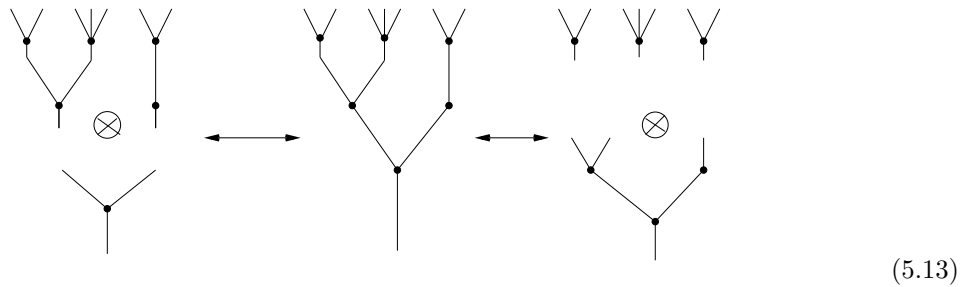
$$\mathcal{O}(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

als Graph mit n einlaufenden “Beinen”, einen Punkt als Darstellung einer beliebigen Abbildung in $\text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$ und einem auslaufenden “Bein”. Wie oben erwähnt, beschreibt diese graphische Interpretation die Bedeutung der Mengen $\mathcal{O}(n)$ für die Operaden, unabhängig vom Beispiel multilinearer Abbildungen.

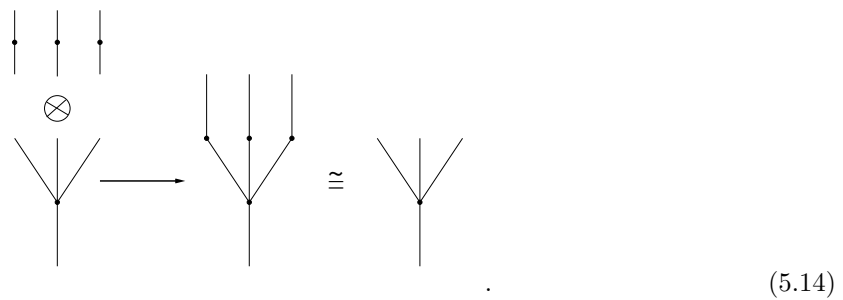
Anhand des Beispiels $B(\mathcal{O}(3) \otimes \mathcal{O}(3) \otimes \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(4))$ wollen wir die graphische Interpretation des Produktes B erläutern:

$$B(\mathcal{O}(3) \otimes \mathcal{O}(3) \otimes \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(4)) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \diagup \quad | \quad \diagdown & \diagup \quad \diagdown & \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \end{array} \\ \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\ \bullet \\ | \end{array} \quad (5.12)$$

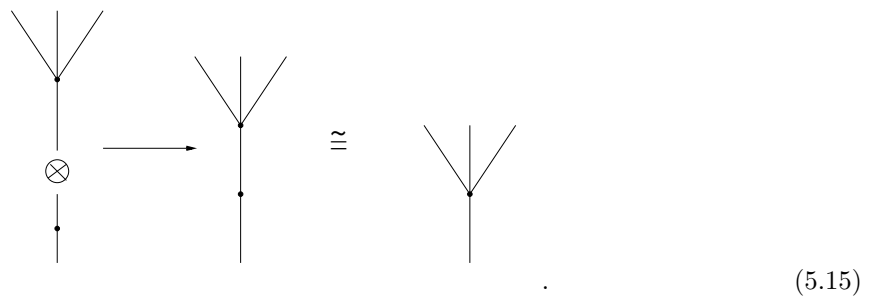
Mit dieser graphischen Darstellung können wir ein Beispiel für die Assoziativität von B (5.4) geben



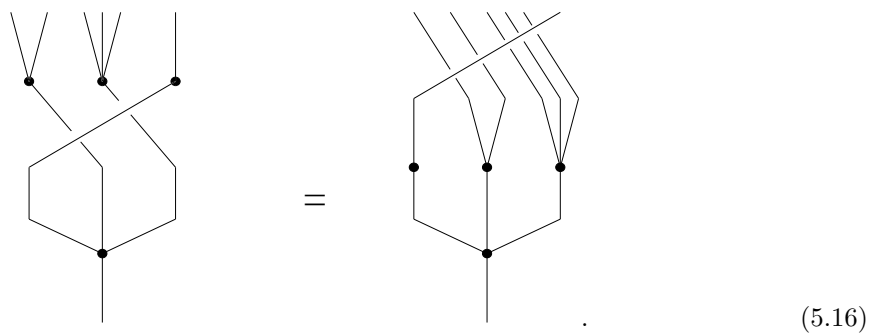
Für das erste Diagramm (5.5) geben wir folgende graphische Interpretation:



Für das zweite Diagramm (5.6) erhalten wir als Beispiel:



Bei den Äquivarianzen ist die graphische Interpretation komplizierter zu geben. Wir zeigen ein Beispiel für das erste Diagramm (5.7):



Für das zweite Diagramm werden wir im Fall der Baumoperade ein Beispiel sehen. In diesem Kapitel haben wir den Begriff der Operade definiert und eine graphische Interpretation einer Operade gegeben. Betrachten wir diese graphische Interpretation, so erkennen wir eine

Verwandtschaft mit Wurzelbäumen. Diese graphentheoretische Verwandtschaft wird uns einen Leitfaden zur Interpretation der Wurzelbäume als eine bestimmte Operade, die wir als *Baumoperade* bezeichnen, geben. Dies soll nun in dem nächsten Kapitel ausgearbeitet werden.

5.2 Baumoperaden

Die Menge der Wurzelbäume ist äquivalent einer bestimmten Klasse von Operaden. Motiviert durch die graphische Darstellung der Operaden wollen wir in diesem Kapitel sogenannte Baumoperaden definieren, auf denen wir eine zur Hopfalgebra der Wurzelbäume isomorphe Hopfalgebrenstruktur einführen werden. Dabei werden die Symmetrieeigenschaften der Wurzelbäume, wie sie auch zur Berechnung des *permutation factors* (engl. Symmetriefaktor) [11] eines Wurzelbaumes benötigt werden, eine wichtige Rolle spielen. Bevor wir jedoch zeigen, wie man einen Wurzelbaum auf eine Operade abbildet, werden wir zunächst noch Operationen auf Wurzelbäumen einführen müssen. Wir definieren zunächst eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathcal{H}_R &\longrightarrow \mathbf{N} \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

die jedem Wurzelbaum t die Fertilität seiner Wurzel zuordnet, also

$$f(t) := f(v_{R_t}) \quad (5.18)$$

wo v_{R_t} die Wurzel des Wurzelbaumes t ist.

Zur Erinnerung: Die Fertilität eines Vertex war als Anzahl der von dem Vertex auslaufenden Kanten definiert.

Die Fertilität der Vertices eines Wurzelbaumes wird eine Zentrale Rolle bei der Interpretation der Wurzelbäume als Operade spielen.

Noch eine weitere Zahl ist für die Beschreibung eines Wurzelbaumes von Interesse, die durch einen Operator d , die sogenannte *Tiefe* (engl. *depth*) eines Wurzelbaumes, gegeben ist:

$$\begin{aligned} d : \mathcal{H}_R &\longrightarrow \mathbf{N} \\ t &\longmapsto d(t) \end{aligned} \quad (5.19)$$

wobei $d(t)$ die Tiefe eines Wurzelbaumes ist, also die maximale Anzahl von Vertices, die auf einem Pfad zur Wurzel liegen. Konvention: Die Wurzel zählen wir dabei nicht mit! In Kapitel 3.4 haben wir bereits eine Operation B_- (3.45) als Operator P^C eines zulässigen Schnittes definiert, der alle Kanten durchtrennt, die von der Wurzel eines Wurzelbaumes auslaufen:

$$B_-(t) = \prod_{j=1}^{f(v_{R_t})} t_j \quad (5.20)$$

Dazu definierten wir einen Operator B_+ , der zu einem Polynom von Wurzelbäumen eine Wurzel hinzufügt, so daß aus dem Polynom ein neuer Wurzelbaum entsteht (3.46):

$$B_+(B_-(t)) = t \quad (5.21)$$

definiert.

Wir definieren nun einen Operator \tilde{B}_- in Anlehnung an den Operator B_- wie folgt:

$$\tilde{B}_-(t) := v_{R_t} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} t_i \right) \quad (5.22)$$

Die Wirkung von \tilde{B}_- auf einen einzelnen Vertex v (also $f(v) = 0$) ist definiert als:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_-(v) &= v \otimes e \\ \tilde{B}_-(e) &= e \otimes e \end{aligned} \quad (5.23)$$

Das Tensorprodukt des Operators \tilde{B}_- ist dabei wie folgt definiert:

$$\left(\bigotimes_{i=1}^n \tilde{B}_- \right) \left[\bigotimes_{k=1}^n t_i \right] := \left(\bigotimes_{i=1}^n v_{R_{t_i}} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=1}^{f(v_{R_{t_i}})} t_{i,j} \right) . \quad (5.24)$$

Analog definieren wir \tilde{B}_+ als Pendant zu B_+ :

$$\tilde{B}_+ \left[v_{R_t} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} t_i \right) \right] := t . \quad (5.25)$$

Für \tilde{B}_+ definieren wir weiterhin:

$$\tilde{B}_+(v \otimes e) = v . \quad (5.26)$$

Wir wollen nun den Operator \tilde{B}_+ folgendermaßen auf ein mehrfaches Tensorprodukt verallgemeinern:

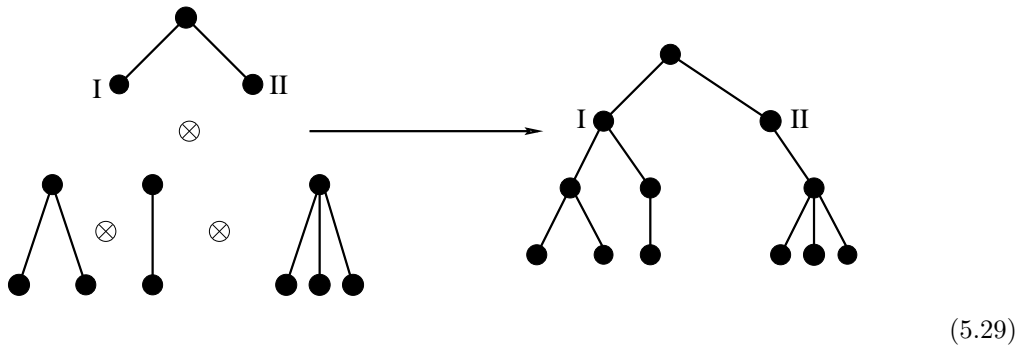
$$\tilde{B}_+^{\otimes} \left[\bigotimes_{i=1}^n v_i \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^n \bigotimes_{k=1}^{f(v_j)} t_k \right) \right] = \bigotimes_{i=1}^n \tilde{t}_i , \quad (5.27)$$

wobei

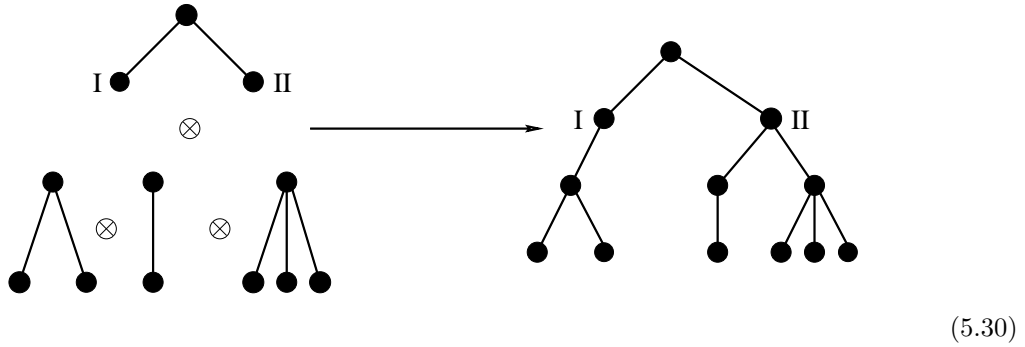
$$\tilde{t}_i := \tilde{B}_+ \left[v_i \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{f(v_i)} t_k \right) \right] . \quad (5.28)$$

Mit dem Operator \tilde{B}_+^{\otimes} können wir auch Wurzelbäume mit anderen Wurzelbäumen verknüpfen, indem wir in (5.27) die Vertizes v_i durch die Endvertizes der jeweiligen Wurzelbäume, die v_i als Endvertex enthalten, ersetzen. Die Fertilität der Endvertizes eines Wurzelbaumes ist jedoch immer 0, was zu folgendem Problem führt: Man kann ad hoc nicht wissen, wieviele Wurzelbäume man mit einem Endvertex des "oberen" Baumes verbinden kann. Diese Wahl muß man individuell und je nach "Bedarf" festlegen. In dem nächsten Beispiel werden wir dies verdeutlichen, indem wir zunächst für den linken äußeren Endvertex, der Übersichtlichkeit halber mit "I" dekoriert, die Fertilität 2 und für den anderen Endvertex, mit "II" dekoriert, die Fertilität 1 festlegen. Danach werden wir die Fertilitäten vertauschen.

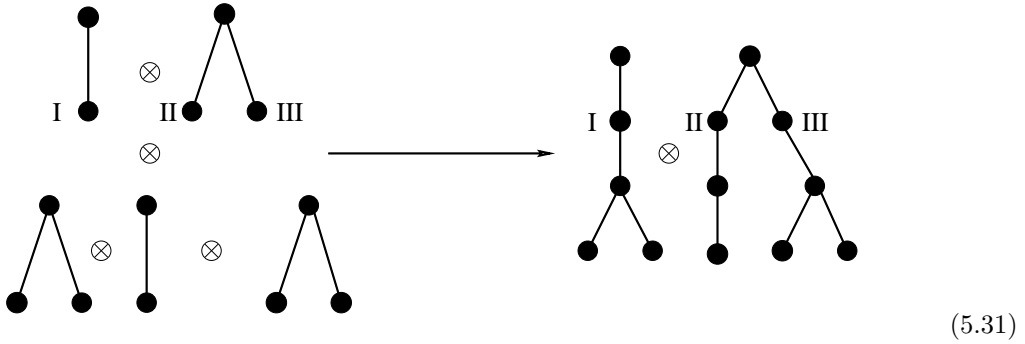
Hier nun der erste Fall (Fertilität I= 2, Fertilität II= 1):



Vertauschung der Fertilitäten (Fertilität I= 1, Fertilität II= 2) führt zu:



Aber auch solche Verknüpfungen sind möglich (Fertilität I= 1, Fertilität II= 1, Fertilität III= 1):



Mithilfe dieser Operatoren werden wir eine Äquivalenz zwischen Wurzelbäumen und Baumoperaden zeigen.

Ausgehend von \tilde{B}_- definieren wir folgende Familie von Operatoren auf iterative Art und Weise:

$$\tilde{B}_-^1 := \tilde{B}_- \quad (5.32)$$

$$\tilde{B}_-^2 := \text{id} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \tilde{B}_- \right) \circ \tilde{B}_-^1$$

$$\tilde{B}_-^3 := \text{id} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \text{id} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \tilde{B}_- \right) \circ \tilde{B}_-^2$$

$$\tilde{B}_-^3 := \text{id} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \text{id} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \text{id} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \bigotimes_{k=1}^{f(t_{i,j})} \tilde{B}_- \right) \circ \tilde{B}_-^3,$$

was zu einer allgemeinen iterativen Definition führt:

$$\tilde{B}_-^n := \text{id} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \text{id} \right) \otimes \dots \otimes \left(\underbrace{\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \bigotimes_{k=1}^{f(t_{i,j})} \dots \bigotimes_{x=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x})} \bigotimes_{y=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y})} \tilde{B}_-}_{(n-2)\text{-Indizes}} \right) \circ \tilde{B}_-^{(n-1)}. \quad (5.33)$$

Betrachten wir die Wirkung von \tilde{B}_-^n auf einen Wurzelbaum t :

$$\tilde{B}_-^2(t) = v_{R_t} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} v_{t_i} \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} t_{i,j} \right). \quad (5.34)$$

Folgender Fall ist von besonderem Interesse, da er einen Wurzelbaum t vollkommen in seine “Bestandteile”, also Vertizes, auflöst:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_-^{d(t)}(t) &:= \tag{5.35} \\ &= v_{R_t} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} v_{t_i} \right) \otimes \dots \otimes \left(\underbrace{\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \bigotimes_{k=1}^{f(t_{i,j})} \dots \bigotimes_{x=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x})} \bigotimes_{y=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y})} \bigotimes_{z=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y,z})} v_{t_{i,j,\dots,x,y,z}}}_{(d(t)-1)\text{-Indizes}} \right). \end{aligned}$$

Da nicht jeder Ast eines Baumes t die Tiefe $d(t)$ haben muß, können einige der Vertizes identisch dem Einsvertex e sein, wie man aus (5.23) entnehmen kann.

Wir haben jetzt einen Operator definiert, der einen Wurzelbaum in ein Tensorprodukt seiner Bestandteile “zerlegt”. Dies ist der erste Schritt zur Bestimmung der zu einem Wurzelbaum t korrespondierenden *Baumoperade*.

$\tilde{B}_-^{d(t)}$ bildet dabei \mathcal{H}_R in eine Unterhopfalgebra von \mathcal{H}_R ab, nämlich der Tensoralgebra (freie unitale Algebra) \mathcal{H}_V über dem Vektorraum, der von $\{v\}$ erzeugt wird, wobei $\{v\}$ die Menge aller Vertizes darstellt, also der Tensoralgebra primitiver Graphen.

Um von der Kategorie der Wurzelbäume in die Kategorie der Operaden abzubilden, definieren wir folgenden Algebrenhomomorphismus (bezüglich \otimes):

$$\begin{aligned} \Omega : \mathcal{H}_V &\longrightarrow \mathcal{O} \tag{5.36} \\ v &\longmapsto \mathcal{O}(f(v)), \quad f(v) > 0. \end{aligned}$$

Für Vertizes mit Fertilität 0 ist Ω folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \Omega(f(v)) &= \mathcal{O}(1), \quad f(v) = 0, \quad v \neq e \tag{5.37} \\ \Omega(e) &= \mathcal{O}(0) \end{aligned}$$

Somit existiert eine Abbildung

$$\Omega \circ \tilde{B}_-^{d(t)} : \mathcal{H}_R \longrightarrow \mathcal{O}. \tag{5.38}$$

Die Abbildung $\Omega \circ \tilde{B}_-^{d(t)}$ wirkt wie folgt auf einen beliebigen Baum $t \in \mathcal{H}_R$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(t) &:= \Omega \circ \tilde{B}_-^{d(t)}[t] := \tag{5.39} \\ &\Omega \left[v_{R_t} \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} v_{t_i} \right) \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \otimes \left(\underbrace{\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \bigotimes_{k=1}^{f(t_{i,j})} \dots \bigotimes_{x=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x})} \bigotimes_{y=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y})} \bigotimes_{z=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y,z})} v_{t_{i,j,\dots,x,y,z}}}_{(d(t)-1)\text{-Indizes}} \right) \right] \\ &= \mathcal{O}(f(v_{R_t})) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \mathcal{O}(f(v_{t_i})) \right) \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes \left(\underbrace{\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{j=1}^{f(t_i)} \bigotimes_{k=1}^{f(t_{i,j})} \dots \bigotimes_{x=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x})} \bigotimes_{y=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y})} \bigotimes_{z=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y,z})} \mathcal{O}(f(v_{t_{i,j,\dots,x,y,z}}))}_{(d(t)-1)\text{-Indizes}} \right). \tag{5.40} \end{aligned}$$

Wir haben also eine Operade als Bild eines Wurzelbaumes unter der Abbildung $\Omega \circ \widetilde{B}_-^{d(t)}[t]$ erhalten. Somit ist es uns gelungen, Wurzelbäume eindeutig als Operade darzustellen. Die Abbildung $\widetilde{B}_-^{d(t)}[t]$ zerlegt dabei jeden Wurzelbaum in seine in ihm enthaltenen pritive Graphen, wobei die Verschachtelung durch die ‘‘Reihenfolge’’ der zerlegten Vertizes gemäß der Wirkung von $\widetilde{B}_-^{d(t)}[t]$ gegeben ist. $\widetilde{B}_-^{d(t)}[t]$ sortiert die Vertizes bezuglich ihrer ‘‘Schichtung’’ beziehungsweise Ebene in dem Wurzelbaum.

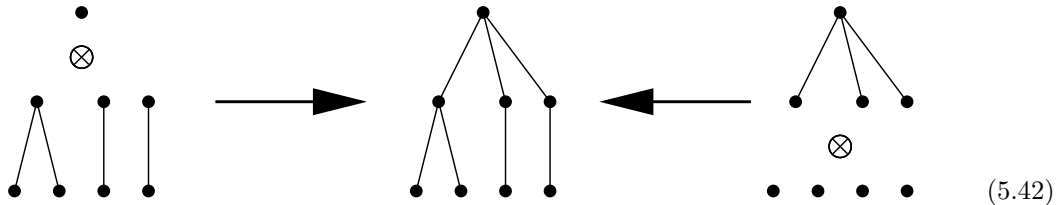
Wichtig für die Betrachtung der Wurzelbäume ist die Möglichkeit, Teilstücke aus einem Wurzelbaum heraustrennen zu können. Wir wollen deshalb eine *Teiloperade* $\mathcal{O}_{t_{i,j}}$ definieren, die einen beliebigen Modul $\mathcal{O}(f(v_{i,j}))$ als Wurzel besitzt. Die Definition einer beliebigen anderen *Teiloperade* verläuft analog;

$$\mathcal{O}_{t_{i,j}} := \mathcal{O}(f(v_{i,j})) \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{f(v_{i,j})} \mathcal{O}(f(t_{i,j,k})) \right) \otimes \dots$$

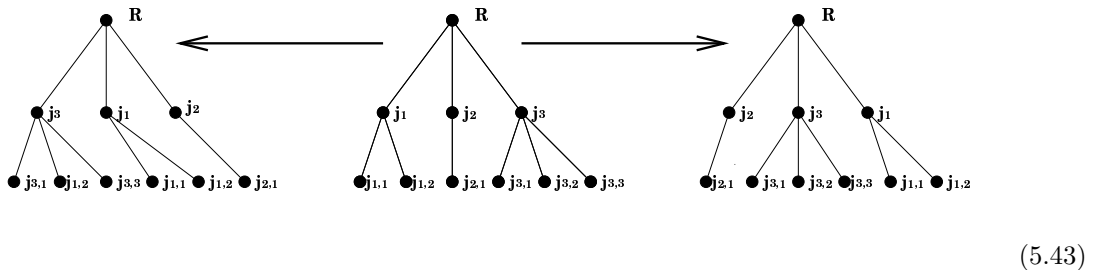
$$\dots \otimes \left(\underbrace{\bigotimes_{k=1}^{f(v_{i,j})} \bigotimes_{l=1}^{f(t_{i,j,k})} \bigotimes_{m=1}^{f(t_{i,j,k,l})} \dots \bigotimes_{x=1}^{f(t_{i,j,k,l,\dots,x})} \bigotimes_{y=1}^{f(t_{i,j,k,l,\dots,x,y})} \bigotimes_{z=1}^{f(t_{i,j,k,l,\dots,x,y,z})} \mathcal{O}(f(v_{t_{i,j,k,l,\dots,x,y,z}}))}_{(d(t_{i,j})-1)\text{-Indizes}} \right). \quad (5.41)$$

Solche *Teiloperaden* werden wir für die Definition einer Hopfalgebrenstruktur benötigen. Folgendes ist zu beobachten: Die End-Vertizes $v_{t_{i,j,k,l,\dots,x,y,z}}$ besitzen alle die Fertilität 0. Das bedeutet, daß die Endmodule der aus Wurzelbäumen übersetzten Operaden alle entweder $\mathcal{O}(1)$ oder $\mathcal{O}(0)$ sind.

Wir müssen uns noch darüber im klaren werden, daß die assoziative Struktur und die Symmetrieeigenschaft der Operadenmultiplikation sich auch in den Wurzelbäumen widerspiegeln. Beginnen wir mit der Assoziativität (5.4). Die Assoziativität der Operadenmultiplikation bedeutet für die Wurzelbäume:

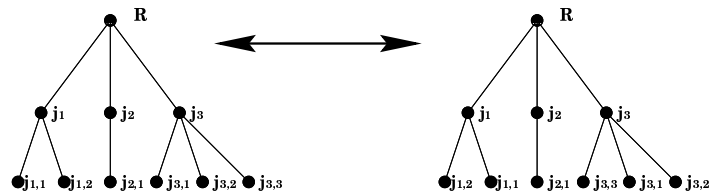


Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Nun müssen wir noch die Äquivarianzen unter Permutationen (5.7, 5.8) diskutieren. Die Äquivarianzen sind aufgrund von Symmetrieeigenschaften der Wurzelbäume erfüllt, im Fall undekorierter Wurzelbäume sogar trivial. Wir untersuchen deshalb den Fall dekoriierter Wurzelbäume. Beginnen wir mit (5.7). Diese Äquivarianz ist aufgrund der Symmetrieeigenschaft von Wurzelbäumen



erfüllt.

Diese Symmetrie sorgt auch dafür, daß die Äquivarianz (5.8) erfüllt ist, denn es gilt:



(5.44)

Somit besitzt jeder Wurzelbaum ein Pendant in einer Speziellen Operade, der sogenannten *Baumoperade*, die wir wie folgt definieren

Def 5.2.1. Eine **Baumoperade** \mathcal{O}_t ist Operade, deren "Endmodule" alle entweder $\mathcal{O}(1)$ oder $\mathcal{O}(0)$ sind.

Wir haben gesehen, daß man mit Baumoperaden ebenfalls die verschachtelte Struktur der Subdivergenzen eines Feynmangraphen "kodieren kann", da Baumoperaden in einer Eins-zu-Eins-Beziehung zu Wurzelbäumen stehen. Wurzelbäume haben aus Sicht von Renormierung die Aufgabe, als Generatorenmenge der Hopfalgebra \mathcal{H}_R die verschachtelte Struktur der Subdivergenzen eines Feynmangraphen algebraisch zu implementieren. Baumoperaden sollten also aufgrund ihrer Äquivalenz zu Wurzelbäumen ebenfalls in der Lage sein, als Generatoren einer zu \mathcal{H}_R isomorphen Hopfalgebra zu dienen, die gleichfalls die Kombinatorik der Zimmermannschen *Forest*-Formel beschreibt.

Kapitel 6

Die Hopfalgebra der Baumoperaden \mathcal{O}_t

6.1 Die Hopfalgebra der Baumoperaden \mathcal{O}_t

Wie wir gesehen haben, gibt es eine Eins-zu-Eins-Beziehung zwischen Wurzelbäumen und Baumoperaden.

Wir wollen nun auf \mathcal{O}_t eine Hopfalgebrenstruktur einführen. Da die Baumoperaden äquivalent der Menge der Wurzelbäume ist, werden wir eine "Übersetzung" der Hopfalgebrenstruktur von \mathcal{H}_R als Hopfalgebrenstruktur für \mathcal{O}_t erhalten. Wir betrachten die freie unitale Algebra, die von der Menge \mathcal{O}_t erzeugt wird. Wir bezeichnen die Einsabbildung wie im Fall der Wurzelbäume als η und die Eins als e .

Um die Hopfalgebrenstruktur in Analogie zu \mathcal{H}_R definieren zu können, müssen wir Schnitte beziehungsweise zulässige Schnitte einer Operade $\mathcal{O}(t)$ einführen. Wir führen einen *einzelnen Schnitt* $c_{i,j}$ ein, wobei i, j hier stellvertretend für beliebige Indizes steht, an denen der *einzelne Schnitt* die Operade durchtrennen soll. Der Schnitt wirkt wie folgt:

$$c_{i,j} : \mathcal{O}_t \longrightarrow \mathcal{O}_t \tag{6.1}$$

$$\mathcal{O}(t) \longmapsto \mathcal{O}(t_{i,j})R^{c_{i,j}}(\mathcal{O}(t)) \ . \tag{6.2}$$

Dabei ist $R^{c_{i,j}}(\mathcal{O}(t))$ eine Operade, bei der $\mathcal{O}(f(v_i))$ durch $\mathcal{O}(f(v_i) - 1)$ ersetzt worden ist und die Moduln, die in $\mathcal{O}(t_{i,j})$ benötigt werden, durch $\mathcal{O}(0) = \kappa$ ausgetauscht sind. Das Ersetzen durch $\mathcal{O}(0) \sim \kappa$ ist durch die Eigenschaft des Tensorproduktes gleichbedeutend mit dem "Weglassen" der ausgeschnittenen Moduln. Es gilt also

$$R^{c_{i,\zeta}}(\mathcal{O}(t)) := \tag{6.3}$$

$$\mathcal{O}(f(v_{R_t})) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \mathcal{O}(f(v_{t_i})) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq \zeta}}^{f(t_i)} \mathcal{O}(f(v_{t_{i,j}})) \right) \dots$$

$$\dots \otimes \left(\underbrace{\bigotimes_{i=1}^{f(v_{R_t})} \bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq \zeta}}^{f(t_i)} \bigotimes_{k=1}^{f(t_{i,j})} \dots \bigotimes_{x=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x})} \bigotimes_{y=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y})} \bigotimes_{z=1}^{f(t_{i,j,k,\dots,x,y,z})} \mathcal{O}(f(v_{t_{i,j,\dots,x,y,z}}))}_{(d(t)-1)\text{-Indizes}} \right)$$

wobei $\mathcal{O}(f(t_i))$ durch $\mathcal{O}(f(t_i)-1)$ ersetzt worden ist. Wir werden später noch Beispiele für Schnitte geben und zeigen, wie wir durch das Ersetzen der ausgeschnittenen Moduln mit $\mathcal{O}(0)$ zu der obigen Formel (6.3) kommen.

Ein *Schnitt* \mathcal{C} ist eine Menge von einfachen Schnitten, $\mathcal{C} = \{c_A, c_H\}$, wobei A, H beliebige Indexmengen für einzelne Schnitte c sind. $R^{\mathcal{C}}$ ist dabei wie in (6.3) definiert, nur daß wir sukzessive jeden weiteren einzelnen Schnitt ausschneiden und zwar so, daß die Teiloperaden der Reihenfolge nach mit dem einzelnen Schnitt der mächtigsten Indexmenge beginnend ausgeschnitten werden. Wir definieren dann das Polynom

$$P^{\mathcal{C}}(\mathcal{O}_t) := \prod_{i=1}^{\sharp(c_A \in \mathcal{C})} P^{c_A} \mathcal{O}(t_A) , \quad (6.4)$$

wobei die Schnitte wiederum der Mächtigkeit der Indexmengen A nach ausgeführt werden. Ein Schnitt ist ein *zulässiger Schnitt* \mathcal{C}_z , falls

$$c_B \in \mathcal{C}_z \Leftrightarrow \begin{cases} B \not\subset A & \forall c_A \in \mathcal{C}_z \\ A \not\subset B & \forall c_A \in \mathcal{C}_z \end{cases} . \quad (6.5)$$

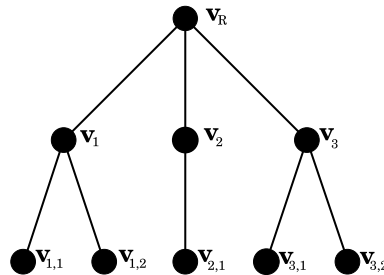
Die Schnitte, die wir auf der Operade \mathcal{O}_t definiert haben, sind äquivalent den Schnitten auf Wurzelbäumen. Das bedeutet, die Abbildung $\Omega \circ \tilde{B}_-^{d(t)}$ respektiert die Schnitte \mathcal{C} und die Operatoren $P^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}$ der Hopfalgebra \mathcal{H}_R . Wir definieren deshalb analog zu (3.16)

$$\begin{aligned} \Delta(e) &= e \otimes e \\ \Delta(\mathcal{O}(t)) &= \mathcal{O}(t) \otimes e + e \otimes \mathcal{O}(t) + \sum_{\text{Zul. Schnitt } \mathcal{C}_z} P^{\mathcal{C}_z}(\mathcal{O}(t)) \otimes R^{\mathcal{C}_z}(\mathcal{O}(t)), \quad \forall t \neq e \\ \varepsilon(e) &= 1, \quad \varepsilon(\mathcal{O}(t)) = 0, \quad \forall \mathcal{O}(t) \neq e \\ S(e) &= e \\ S(\mathcal{O}(t)) &= -\mathcal{O}(t) - \sum_{\text{zul. Schnitt } \mathcal{C}_z} S[P^{\mathcal{C}_z}(\mathcal{O}(t))] R^{\mathcal{C}_z}(\mathcal{O}(t)), \quad \forall \mathcal{O}(t) \neq e . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die Hopfalgebrenstruktur auf den Baumoperaden \mathcal{O}_t ist offensichtlich isomorph zu \mathcal{H}_R , der Hopfalgebra von Wurzelbäumen. Allerdings ist die Konstruktion der Baumoperaden sehr unübersichtlich und technisch. Wir wollen deshalb in dem nächsten Kapitel ein Beispiel für die Konstruktion einer Baumoperade und deren Schnitte geben.

6.2 Beispiel

Betrachten wir folgenden Wurzelbaum, dessen Vertizes wir der Übersichtlichkeit halber beschriftet haben.



(6.7)

Übersetzen wir dies mit $\Omega \circ \widetilde{B}_-^{d(t)}$ in die Sprache der Operaden, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
v_R &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_R)) = \mathcal{O}(3) \\
v_1 &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_1)) = \mathcal{O}(2) \\
v_2 &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_2)) = \mathcal{O}(1) \\
v_3 &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_3)) = \mathcal{O}(2) \\
v_{1,1} &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_{1,1})) = \mathcal{O}(1) \\
v_{1,1} &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_{1,1})) = \mathcal{O}(1) \\
v_{1,2} &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_{1,2})) = \mathcal{O}(1) \\
v_{2,1} &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_{2,1})) = \mathcal{O}(1) \\
v_{3,1} &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_{3,1})) = \mathcal{O}(1) \\
v_{3,2} &\longrightarrow \mathcal{O}(f(v_{3,2})) = \mathcal{O}(1) .
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Wir erhalten somit als Baumoperade

$$\mathcal{O}(t) := \mathcal{O}(f(v_R)) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_1)) \otimes \mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3)) \right) \otimes \tag{6.9}$$

$$\otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{1,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{1,2})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right) , \tag{6.10}$$

oder nach Einsetzen von (6.9):

$$\mathcal{O}(t) := \mathcal{O}(3) \otimes \left(\mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(2) \right) \otimes \tag{6.11}$$

$$\otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right) . \tag{6.12}$$

Betrachten wir uns die Wirkung der Schnitte auf $\mathcal{O}(t)$. Zuerst die Wirkung eines einfachen Schnittes

$$\mathcal{C} = \{c_1\} . \tag{6.13}$$

Wir erhalten als Wirkung von \mathcal{C} auf $\mathcal{O}(t)$:

$$P^{\mathcal{C}}(\mathcal{O}(t)) = \mathcal{O}(f(v_1)) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{1,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{1,2})) \right) \tag{6.14}$$

$$= \mathcal{O}(2) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right)$$

und

$$R^{\mathcal{C}}(\mathcal{O}(t)) = \mathcal{O}(f(v_R) - 1) \otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3)) \right) \otimes \tag{6.15}$$

$$\otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right)$$

$$= \mathcal{O}(2) \otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(2) \right) \otimes \tag{6.16}$$

$$\otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right) , \tag{6.17}$$

wo wir $\mathcal{O}(0) = \kappa$ benutzt haben, oder Äquivalent

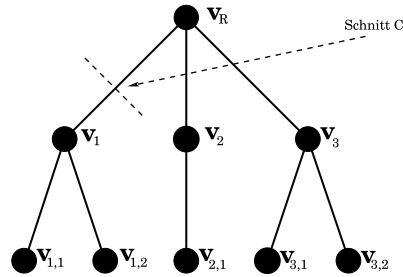
$$R^{\mathcal{C}}(\mathcal{O}(t)) = \mathcal{O}(f(v_R) - 1) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3)) \right) \otimes \tag{6.18}$$

$$\otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right)$$

$$= \mathcal{O}(2) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(2) \right) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right) \tag{6.19}$$

aufgrund der κ -Linearität des Tensorproduktes.

Dieser Schnitt hat folgendes Pendant als Schnitt von Wurzelbäumen:



(6.20)

Als weiteres Beispiel betrachten wir uns einen zulässigen Schnitt $\mathcal{C}_z = \{c_1, c_{3,1}\}$

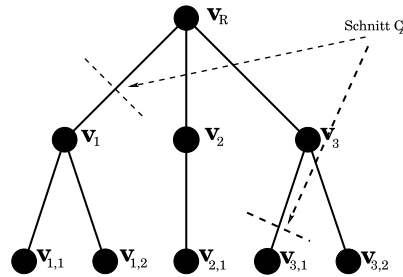
Die Reihenfolge der Schnitte ist bei einem zulässigen Schnitt gleichgültig. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{C}_z}(\mathcal{O}(t)) &= \mathcal{O}(f(v_{3,1})) \cdot \mathcal{O}(f(v_1)) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{1,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{1,2})) \right) \\ &= \mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(2) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Für das Schnittstück mit dem *Wurzelmodul* folgt

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{C}_z}(\mathcal{O}(t)) &= \mathcal{O}(f(v_R) - 1) \otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3) - 1) \right) \otimes \\ &\otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right) \\ &= \mathcal{O}(f(v_R) - 1) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3) - 1) \right) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right) \\ &= \mathcal{O}(2) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Auf Wurzelbäumen besitzt \mathcal{C}_z folgendes Äquivalent:



(6.23)

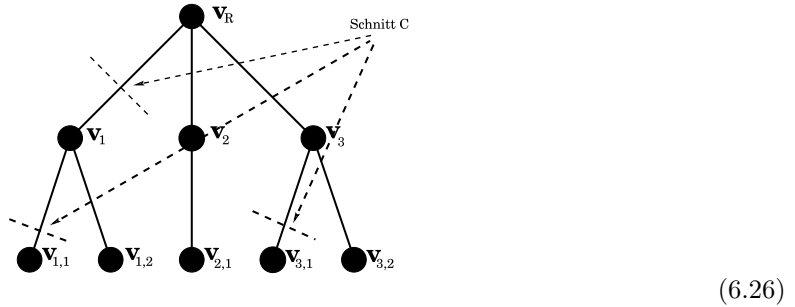
Als letztes Beispiel wollen wir noch einen Schnitt zeigen, der nicht zulässig ist, und zwar den Schnitt $\mathcal{C} = \{c_1, c_{1,1}, c_{3,1}\}$. Dieser Schnitt ist nicht zulässig, da die Indexmenge $\{1\} = \{1, \ } \subset \{1, 1\}$. Hier müssen wir die Schnittreihenfolge beachten: zuerst die Schnitte mit der mächtigeren Indexmenge $c_{1,1}, c_{3,1}$ und dann den Schnitt c_1 . Wir erhalten

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{C}}(\mathcal{O}(t)) &= \mathcal{O}(f(v_{1,1}) - 1) \cdot \mathcal{O}(f(v_{3,1})) \cdot \mathcal{O}(f(v_1)) \otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_{1,2})) \right) \\ &= \mathcal{O}(f(v_{1,1}) - 1) \cdot \mathcal{O}(f(v_{3,1})) \cdot \mathcal{O}(f(v_1)) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{1,2})) \right) \\ &= \mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1) \cdot \mathcal{O}(1) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

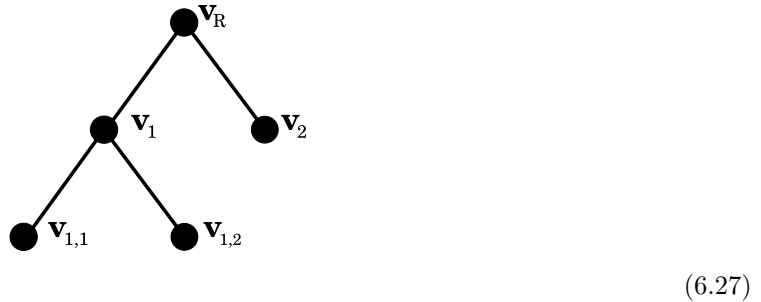
Für $R^c(\mathcal{O}(t))$ erhalten wir wie im letzten Beispiel:

$$\begin{aligned}
 R^{c_z}(\mathcal{O}(t)) &= \mathcal{O}(f(v_R) - 1) \otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3) - 1) \right) \otimes \\
 &\otimes \left(\mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(0) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right) \\
 &= \mathcal{O}(f(v_R) - 1) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_2)) \otimes \mathcal{O}(f(v_3) - 1) \right) \otimes \left(\mathcal{O}(f(v_{2,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{3,2})) \right) \\
 &= \mathcal{O}(2) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right) \otimes \left(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

Das Pendant dieses Schnittes für den Wurzelbaum t ist



Jetzt wollen wir uns ein Beispiel für eine Baumoperade ansehen, deren Tiefe von Ast zu Ast variiert:



Dieser Baum hat folgende Baumoperade als Pendant:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{O}(f(v_R)) \otimes (\mathcal{O}(f(v_1)) \otimes \mathcal{O}(f(v_2))) \otimes (\mathcal{O}(f(v_{1,1})) \otimes \mathcal{O}(f(v_{1,2})) \otimes \mathcal{O}(0)) \\
 &= \mathcal{O}(2) \otimes (\mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(1)) \otimes (\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(0)) .
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

Diese Beispiele zeigen, wie Schnitte auf Baumoperaden wirken und auf welche Weise sie in der Sprache der Wurzelbäume zu interpretieren sind.

Bis jetzt haben wir nur die Übersetzung undekorierte Wurzelbäume betrachtet. Im nächsten Kapitel soll nun untersucht werden, ob es ein Pendant zu dekorierten Wurzelbäumen in \mathcal{O}_t gibt

6.3 Zusammenfassung des Abschnittes

Wir haben gezeigt, daß die Menge aller Wurzelbäume identisch einer speziellen Art von Operaden, der Baumoperaden, sind. Um diese Äquivalenz zu zeigen, haben wir jeden Wurzelbaum in seine Vertizes, also primitiven Subgraphen, schichtweise zerlegt. Diese Zerlegung ist eine Zerlegung eines Wurzelbaumes in die Tensoralgebra aller Vertizes (primitiver Graphen). Diese Äquivalenz zwischen Operaden und Wurzelbäumen ermöglicht uns eine rein algebraische "kodierung" der verschachtelten Struktur der Subdivergenzen von Feynmangraphen ohne zusätzliche graphentheoretische Mittel (wie im Fall der Wurzelbäume). Auf den Baumoperaden ist weiterhin eine zu \mathcal{H}_R isomorphe

Hopfalgebra definiert, so daß wir die Kombinatorik der Zimmermannschen Forest Formula und damit verbunden den Renormierungsprozeß algebraisch beschreiben können.

Für die Kombinatorik von Renormierung ist die Betrachtung undekoriierter Wurzelbäume ausreichend. Wollen wir jedoch echte Quantenfeldtheorien beschreiben, so kommen wir um die Dekoration der Vertizes der Wurzelbäume nicht herum. Die Frage ist, auf welche Weise wir der Dekoration der Wurzelbäume auf Seite der Baumoperaden Rechnung tragen können. Die Antwort auf dieses "Problem" ist dabei denkbar einfach. Auf der Ebene der Wurzelbäume entsprach eine Dekoration einer Auszeichnung der einzelnen Vertizes. Auf der Ebene der Operaden bedeutet dies, daß wir die einzelnen Moduln $\mathcal{O}(n)$ zusätzlich noch mit der Dekoration markieren. Wir bezeichnen diese spezielle Baumoperade als *dekorierte Baumoperade*.

Somit haben wir gezeigt, wie wir jedem dekorierten Wurzelbaum eine speziell Operade, eine sogenannte dekorierte Baumoperade, zuordnen können.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Hopfalgebrenstruktur von Renormierung störungstheoretischer Quantenfeldtheorien aus dem Blickwinkel verschiedener mathematischer Methoden untersucht:

- i) Kategorientheorie
- ii) mit Hilfe von Operaden.

Die kategorientheoretische Interpretation führte zu folgenden Ergebnissen: Die an dem Renormierungsprozeß beteiligten algebraischen Größen lassen sich, unabhängig der betrachteten Theorie, zu einer Kategorie zusammenfassen. Die Objekte dieser Kategorie sind Mengen, die durch eine Skala (Derivation) charakterisiert sind. Die Elemente dieser Mengen sind Darstellungen der Hopfalgebra der Wurzelbäume auf einen Raum von Laurentreihen, wobei jede Darstellung eine bestimmte Quantenfeldtheorie oder ein Spielzeugmodell solcher Theorien repräsentiert. Jedes Objekt dieser Kategorie repräsentiert also alle Quantenfeldtheorien und äquivalente Spielzeugmodelle, die durch eine bestimmte Skala, gegeben durch Parameter bei der Berechnung der jeweiligen Theorien wie Massen, äußere Impulse oder Kopplungskonstanten, definiert sind. Die Morphismen der Kategorie repräsentieren die Wirkung von Renormierungsabbildungen auf diesen Mengen. Diese Kategorie erlaubt eine theorieunabhängige Formulierung des Renormierungsverfahrens, da zur Beschreibung des Renormierungsprozesses ausschließlich Eigenschaften der Objekte und Morphismen benötigt werden. Um das Renormierungsverfahren mit Hilfe dieser Kategorie beschreiben zu können, muß ein Produkt der Objekte eingeführt werden. Dieses Produkt verletzt kontrollierbar die Assoziativität, wobei man die Kontrolle über diesen Assoziativitätsverluß durch eine Abbildung, den sogenannten Assoziator, erhält. Um die Wirkung beliebiger Renormierungsabbildungen, in der Arbeit am Beispiel des *On-Shell*-Renormierungsschemas betrachtet, zu beschreiben, muß eine additive Struktur auf der Kategorie eingeführt werden. Diese additive Struktur spielt eine zentrale Rolle, da nur durch diese Struktur die Wirkung einer beliebigen Renormierungsabbildung ein Äquivalent als Morphismus der Kategorie besitzt. Eine vollständige kategorientheoretische Interpretation erhält man durch Definition einer Hopfkategorie, wobei aufgrund des zuvor eingeführten assoziativitätsverletzenden Produktes das kategorifizierte Faltungsprodukt mit der Antipode dieser Kategorie eine Beschreibung des Renormierungsprozesses liefert. Die Definition der Hopfkategorie verlangt jedoch die Einführung mehrerer Abbildungen, die wiederum ebenfalls mit der Wirkung von Renormierungsabbildungen korrespondieren.

Der zweite Blickwinkel, unter dem die Hopfalgebra der Wurzelbäume betrachtet wurde, ist algebraischer Natur. Grundlage dazu sind Operaden, die man als "Sammlung" multilinearer Abbildungen in Verbindung mit einer permutationsinvarianten Verknüpfung interpretieren kann. Die Verknüpfung dieser multilinearen Abbildungen läßt sich graphisch in Form einer Baumstruktur darstellen. Diese Baumstruktur ist äquivalent den die Hopfalgebrenstruktur definierenden Wurzelbäumen. Aufgrund dieser Äquivalenz kann eine "Übersetzung" eines undekorierten Wurzelbaumes auf eine spezielle Operade, die Baumoperade, definiert werden. Somit kann die Struktur der Wurzelbäume als rein algebraische Objekte in Form spezieller Operaden angegeben werden. Auf diesen Operaden läßt sich weiterhin eine zu der Hopfalgebra der Wurzelbäume isomorphe Hopfalgebrenstruktur definieren.

Dies ist, kurz zusammengefaßt, der Inhalt der vorliegenden Arbeit. An diesem Punkt erschöpft sich aber nicht das Studium der hier definierten Strukturen. Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden bieten vielmehr Anlaß zu weiteren Untersuchungen: Zur Definition der Hopf-kategorien sind alleine zehn verschiedene Abbildungen, sogenannte natürliche Transformationen, notwendig. Diese Abbildungen sind noch auf ihre Bedeutung für den Renormierungsprozeß zu prüfen. Dazu müssen die Strukturen anhand eines Spielzeugmodells oder einer echten Quantenfeldtheorie durch Berechnungen bestimmt werden, so daß man diese Größen sinnvoll interpretieren kann. Das gleiche gilt für die additive Struktur. Nachdem ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der zu einem beliebigen Renormierungsschema gehörenden Morphismen angegeben worden ist, ist es sinnvoll, diese Morphismen und die damit verbundenen Skalenwechsel für eine Theorie auszurechnen und die dazugehörigen direkten Summen zu bestimmen. Auch die Definition der Baumoperaden bietet Anlaß zu weiterem Studium: Mit Operaden sind bestimmte Algebren verbunden [32]. Diese Algebren gilt es zu definieren und physikalisch zu interpretieren. Solche Algebren könnten eng mit dem Renormierungsprozess verknüpft sein. Berechnungen für realistische Theorien werden dabei Klarheit schaffen.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Strukturen zur Beschreibung von Renormierung liefern demnach neue Methoden, die Grundlagen für weitere Untersuchungen des Renormierungsprozesses sein werden.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Commun. Math. Phys. 199, 203-242 (1998)
- [2] D. Kreimer, *On the Hopf Algebra Structure of Perturbative Quantum Field Theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), p. 303-334
- [3] D. Kreimer, *Chen's Iterated Integral represents the Operator Product Expansion*, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 3, 2000
- [4] Alain Connes, D. Kreimer, *Lessons from Quantum Field Theory*, Lett. Math. Phys. 48, 85-96, 1999
- [5] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem*, JHEP 9909, 2, 1999
- [6] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I: the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Commun. Math. Phys. 210, 249-273, 2000
- [7] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II: the β -function, diffeomorphisms and the renormalization group*, hep-th/0003188
- [8] D. Kreimer, *Shuffling quantum field theory*, hep-th/9912290
- [9] D. Kreimer, *Feynman diagrams and polylogarithms: shuffles and pentagons*, hep-th/0005279
- [10] D. J. Broadhurst, D. Kreimer, *Towards cohomology of renormalization: bigrading the combinatorial Hopf algebra of rooted trees*, hep-th/0001202
- [11] D. J. Broadhurst, D. Kreimer, *Renormalization automated by Hopf algebra*, hep-th/9810087
- [12] D. Kreimer, R. Delbourgo, *Using the Hopf algebra structure of QFT in calculations*, Phys. Rev. D60, 105025, 1999
- [13] D. Kreimer, *On Overlapping Divergences*, Commun. Math. Phys. 204, 669-689 (1999)
- [14] D. Kreimer, *Knots and Feynman Diagrams*, Cambridge University Press, 2000
- [15] M. Neuchl, *Representation Theory of Hopf Categories*, Dissertation
<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~neuchl/>
- [16] John. C. Baez, *Higher-Dimensional Algebra III: n-Categories and the Algebra of opetopes*, q-alg/9702014 (1997)
- [17] John. C. Baez, *Categorification*, q-alg/9802029 (1998)
- [18] L. Crane, I. Frenkl, *Four dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases*, J. Math. Phys. 35 (1994), 5136-4154
- [19] L. Crane, D. Yetter, *Deformations of (Bi)tensor categories*, Kansas U. preprint, q-alg/9612011

-
- [20] J. Scott Carter, Louis H. Kauffman, Masahico Saito, *Structures and Diagrammatics of Four Dimensional Topological Lattice Field Theories*, math.GT/9806023
- [21] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer Verlag Berlin, second edition (1998)
- [22] P. Schauenburg, *Tannaka Duality for Arbitrary Hopf Algebras*, Algebraische Berichte 66 (1992)
- [23] B. Pareigis, *Reconstruction of hidden symmetries*, Private Mitteilung
<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~pareigis/>
- [24] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer Verlag Berlin (1995).
- [25] T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer Verlag Berlin (1996)
- [26] K. Hepp, *Proof of the Bogoliubov-Parasiuk Theorem of Renormalization*, Comm. Math. Phys.2 (1966), 301-326
- [27] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984)
- [28] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980
- [29] N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience Publishers, 1959
- [30] G. t'Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B44 (1972), 189-213
- [31] G. t'Hooft, M. Veltman, *Scalar One-Loop Integrals*, Nucl. Phys. B153 (1979), 365-401
- [32] I. Kritz, J.P. May *Operads and Motives*, Series Asterisque 233 (1995)
- [33] E.R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups* (Pure and Applied Mathematics), Academic Press (1973)
- [34] M. Mertens, *Algebraic Aspects of Renormalization*, Czech. J. Phys. **50** (2000), No. 1, 151-156
- [35] M. Debert, Diplomarbeit, Universität Mainz

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Danken, die mich bei meiner Dissertation unterstützt und zu ihrem Gelingen beigetragen haben:

- Dirk Kreimer danke ich für seine Aufgabenstellung, sowie für seine unermüdlichen Diskussionen und Seminare, die stets neue Ideen und Motivationen hervorbrachten,
- Hubert Spiesberger, Alexander Frink, Richard B. Kreckel, Carsten Michel und Christian Pösel für Korrekturlesen, Diskussionen und Unterstützung in $\text{T}_\text{E}\text{X}$ -nischen Fragen,
- Susanne Kreimer für bibliothekarische Unterstützung, ohne die die Beschaffung von Literatur oft unmöglich gewesen wäre,
- der gesamten Arbeitsgruppe ThEP (auf eine Aufzählung wird hier verzichtet, um allen gleichermaßen zu danken),
- meiner Freundin Johanna Bieda, die mir immer die notwendige Kraft gegeben hat,
- meinen Eltern, für die Unterstützung während meiner Studien- und Dissertationszeit,
- der Landesgraduiertenförderung Rheinland-Pfalz für die finanzielle Unterstützung.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Mathias Mertens
Anschrift: Goldbergstr.17
55268 Nieder-Olm

Ausbildung

1973-1978 Grundschole Nieder-Olm
1978-1987 Gymnasium Nieder-Olm
3.10.1989 Immatrikulation im Fach Physik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
4.10.1991 Vordiplom Physik
30.7.1996 Immatrikulation im Fach Mathematik an der
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
18.12.1996 Diplom Physik
Betreuer: Prof. N.A. Papadopoulos
Thema: Hopfgebren-Struktur und Quantisierung

Sonstiges

3.08.1987-31.3.1989 Zivildienst im Sozialamt Mainz